Cours MT22 - Chapitre 6

Exercice A.1.12 : Soit $\vec{F} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x+y \end{pmatrix}$ un champ de vecteur de classe $\mathscr{C}^1$ au moins.

• Le bord $\mathscr{C}$ du disque D de centre O et de rayon $R > 0$ est fermé et sans point double. Une paramétrisation de ce cercle est

$$M \in \mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \theta \in [0, 2\pi[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(\theta) = \begin{pmatrix} \phi_1(\theta) = R\cos\theta \\ \phi_2(\theta) = R\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Le sens direct correspond au sens croissant des valeurs $\theta : 0 \to 2\pi$. Dans ce cas

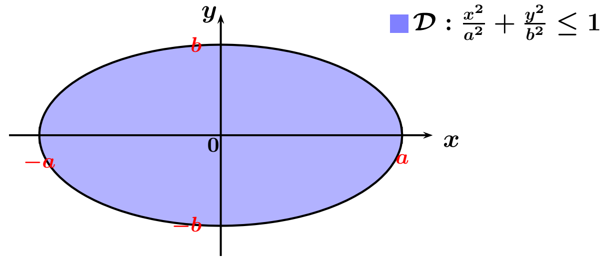
$$\begin{aligned}
\int_{\mathscr{C}} P dx + Q dy &= \int_0^{2\pi} (R\cos\theta + R\sin\theta) \times (-R\sin\theta) d\theta + (2R\cos\theta + R\sin\theta) \times R\cos\theta \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-R^2\cos\theta\sin\theta - R^2\sin^2\theta + 2R^2\cos^2\theta + R^2\sin\theta\cos\theta\right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-R^2\sin^2\theta + 2R^2\cos^2\theta\right] d\theta \\
&= R^2 \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1-\cos 2\theta}{2} + 1 + \cos 2\theta\right] d\theta \\
&= R^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + 3\cos 2\theta}{2} d\theta \\
&= R^2 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{3\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi R^2.
\end{aligned}$$

• On vérifie l'égalité de Green-Riemann.
On calcule l'intégrand $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2 - 1 = 1.$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy = \iint_D 1 \, dxdy = \mathcal{A}ire(D) = \pi R^2 = \int_{\mathscr{C}} \vec{F} \cdot \vec{d\ell}.$$

Exemple : Calculer l'aire du domaine délimité par une ellipse $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$

Correction. Au chapitre 4, nous avions trouvé $\mathcal{A}ire(D) = ab\pi$



Le bord de $\mathscr{C}$ se paramétrise de la façon suivante

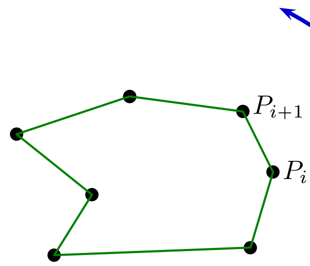
$$M \in \mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \theta \in [0, 2\pi[, \; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(\theta) = \begin{pmatrix} \phi_1(\theta) = a\cos\theta \\ \phi_2(\theta) = b\sin\theta \end{pmatrix}$$

Le sens direct correspond au sens croissant des valeurs $\theta : 0 \to 2\pi$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}ire(D) = \int_{\mathscr{C}} xdy = \int_0^{2\pi} a\cos\theta \times b\cos\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} ab\cos^2\theta \, d\theta \\ = ab\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} \, d\theta \\ = ab\Big[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\Big]_0^{2\pi} = ab\pi \end{aligned}$$

Exemple : Calculer l'aire du domaine D délimité par un polygône de sommets $P_1(x_1, y_1), \ldots, P_N(x_N, y_N)$, orientés dans le sens direct.

Correction. Considérons un polygône sans point double que nous parcourons dans le sens direct



L'aire ce polygône s'obtient alors à l'aide de l'intégrale curviligne suivante

$$\mathcal{A}ire(D) = \int_{\mathscr{C}} x\,dy = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{\overrightarrow{P_iP_{i+1}}} x\,dy.$$

Le chemin rectiligne orienté $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ se paramétrise de la façon suivante

$$M \in \overrightarrow{P_iP_{i+1}} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, t \in [0,1],\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1-t)P_i + tP_{i+1} = \begin{pmatrix} \phi_1(t) = (1-t)x_i + tx_{i+1} \\ (1-t)y_i + ty_{i+1} \end{pmatrix}.$$

Le sens de parcours allant du point P_i au point P_{i+1} se traduit par le sens des valeurs $t : 0 \to 1$. On obtient

$$\begin{aligned} \int_{\overrightarrow{P_iP_{i+1}}} x\,dy &= \int_0^1 \big[(1-t)x_i + tx_{i+1}\big] \times \big[-y_i + y_{i+1}\big]dt \\ &= (y_{i+1} - y_i)\Big[\tfrac{(1-t)^2}{2}x_i + \tfrac{t^2}{2}x_{i+1}\Big]_0^1 \\ &= (y_{i+1} - y_i)\frac{x_{i+1} - x_i}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathcal{A}ire(D) = \sum_{i=0}^{N-1} (y_{i+1} - y_i)\tfrac{x_{i+1} - x_i}{2},$$

avec la convention $P_0 = P_N$.