Cours MT22 - Chapitre 7

Exemple. Calculer l'aire de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ avec $R > 0$ fixé.

Correction. On utilise une paramétrisation en coordonnées sphériques :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\sin\theta \\ R\sin\varphi\sin\theta \\ R\cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \varphi \in [0, 2\pi[\text{ et } \theta \in [0, \pi].$$

On calcule $\vec{t_\varphi}$, $\vec{t_\theta}$ puis $||\vec{t_\varphi} \wedge \vec{t_\theta}||$:

$$\vec{t_\varphi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\sin\theta \\ R\cos\varphi\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{t_\theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\theta \\ R\sin\varphi\cos\theta \\ -R\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{t_\varphi} \wedge \vec{t_\theta} = \begin{pmatrix} -R^2\cos\varphi\sin^2\theta \\ -R^2\sin\varphi\sin^2\theta \\ -R^2\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta - R^2\cos^2\varphi\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R^2\cos\varphi\sin^2\theta \\ -R^2\sin\varphi\sin^2\theta \\ -R^2\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix} = R^2\sin\theta \underbrace{\begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi\sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$$

On a

$$||\vec{t_\varphi} \wedge \vec{t_\theta}|| = R^2\sin\theta \underbrace{||\vec{v}||}_{=1} = \boxed{R^2\sin\theta}.$$

En effet $\sin\theta \geqslant 0$ pour $\theta \in [0, \pi]$ et

$$\begin{aligned} ||\vec{v}|| &= \sqrt{(-\sin\varphi\sin\theta)^2 + (-\cos\varphi\sin\theta)^2 + (-\cos\theta)^2} \\ &= \sqrt{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\sin^2\theta + \cos^2\theta} \\ &= \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} \\ &= \sqrt{1} = 1. \end{aligned}$$

Par application du chapitre 7, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}ire(S) = \iint_S 1\, d\sigma = \iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} ||\vec{t_\varphi} \wedge \vec{t_\theta}||\, d\varphi d\theta &= \iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} R^2\sin\theta\, d\varphi d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} 1 d\varphi\right) \times \left(\int_0^{\pi} R^2\sin\theta\, d\theta\right) \\ &= 2\pi \times \Big[-R^2\cos\theta\Big]_0^{\pi} \\ &= 2\pi \times \big(-R^2 \times (-1) - (-R^2 \times 1)\big) = 4\pi R^2 \end{aligned}$$

NB : Le volume d'une boule de rayon R est tout simplement la primitive en R de ce résultat : $\frac{4}{3}\pi R^3$.
Cela se justifie à l'aide du changement de variable 3D du chapitre 5, où les variables d'intégrations sont (r, φ, θ).
Le jacobien est identique, il manque seulement la dernière étape du calcul qui est l'intégrale de la variable r suivante

$$\int_0^R 4\pi r^2\, dr = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Corollaire. Soit S une surface de $\mathbb{R}^3$ définie explicitement par

$$S = \left\{M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ z = g(x,y) \text{ et } (x,y) \in D\right\}$$

avec $D \subset \mathbb{R}^2$ quarrable et g de classe $\mathscr{C}^1$. Alors l'aire de la surface S est $\mathcal{A}ire(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + (\frac{\partial g}{\partial x})^2 + (\frac{\partial g}{\partial y})^2}\, dxdy.$

Preuve. On utilise la paramétrisation suivante

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x,y) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (x,y) \in D.$$

On calcule $\vec{t}_x$, $\vec{t}_y$ puis $||\vec{t}_x \wedge \vec{t}_y||$:

$$\vec{t}_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix} \quad \vec{t}_y = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{t}_x \wedge \vec{t}_y = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial x} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$||\vec{t}_x \wedge \vec{t}_y|| = \sqrt{1 + (\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)^2 + (\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)^2}.$$

D'où

$$\mathcal{A}ire(S) = \iint\limits_S 1\, d\sigma = \iint\limits_D ||\vec{t}_x \wedge \vec{t}_y||\, dxdy = \iint\limits_D \sqrt{1 + (\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)^2 + (\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)^2} dxdy.$$

Exercice A.1.4. Soit $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = x^2 + y^2 \text{ et } z \leqslant 4\}$.

Correction. On veut déterminer l'aire de cette portion de paraboloïde à l'aide d'une paramétrisation par les variables (x,y).
1. On vous demande de déterminer le domaine de définition des variables (x,y).
De l'énoncé, on déduit seulement l'information suivante

$$x^2 + y^2 \leqslant 4.$$

Le domaine D recherché est donc un disque de rayon 2.
2. On vous demande de déterminer $\sigma(x,y) = ||\vec{t_x} \wedge \vec{t_y}||$ à l'aide de la paramétrisation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (x,y) \in D.$$

$$\vec{t_x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \quad \vec{t_y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{t_x} \wedge \vec{t_y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

et $\boxed{\sigma(x,y) = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$.
3. On calcule l'aire de S à l'aide de la formule du chapitre 7

$$\mathcal{A}ire(S) = \iint_S 1\, d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy$$

Le domaine d'intégration étant un disque on utilise les outils du chapitre 4 pour effectuer le calcul : à savoir une changement de variable en coordonnées polaires.

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x = 2r\cos\theta \\ y = 2r\sin\theta \end{pmatrix};\ r \in [0,1] \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[\right\} \quad \text{avec } |J_\phi| = 4r.$$

$$\mathcal{A}ire(S) = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi[} \sqrt{1 + 16r^2} \times 4r\, drd\theta$$

On utilise la formule d'intégration

$$\int u' \times u^\alpha = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \quad \text{avec } \alpha = \tfrac{1}{2}.$$

On note que $u' = (1 + 16r^2)' = 32r$ pour "ajuster la constante" :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}ire(S) = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi[} \sqrt{1 + 16r^2} \times 32r \times \frac{1}{8}\, drd\theta &= \frac{1}{8}\left(\int_0^{2\pi} 1\, d\theta\right) \times \left(\int_{0^1} 32r \times (1 + 16r^2)^{\frac{1}{2}} dr\right) \\ &= \frac{2\pi}{8} \times \left[\frac{(1 + 16r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} \times \frac{2}{3} \times (17^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{\pi}{6}(17^{\frac{3}{2}} - 1). \end{aligned}$$

Exercice A.1.12 du poly On veut déterminer l'ordonnée du centre de gravité de la surface définie par

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+z^2=4,\ x+y<2 \text{ et } y>0,\ z>0\}.$$

Correction. Nous devons calculer successivement

$$\mathcal{A}ire(S) = \iint_S 1\, d\sigma \quad \text{puis} \quad y_G = \frac{1}{\mathcal{A}ire(S)} \iint_S y\, d\sigma.$$

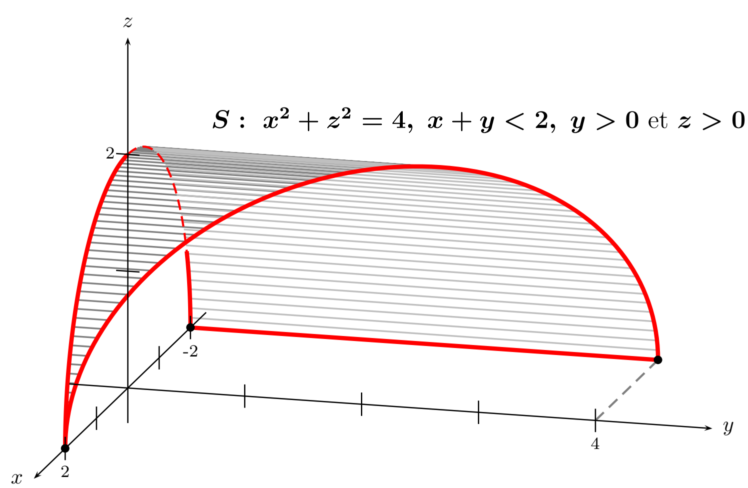
Si vous souhaitez visualiser la figure 3D, il faut déterminer le bord de S qui est une réunion d'arête rectiligne ou courbe. On les obtient en étudiant chaque intersection du cylindre avec l'un des plans $x+y=2$, $y=0$ ou $z=0$.

$$\underbrace{\begin{cases} x^2+z^2=4 \\ x+y=2 \\ y \geqslant 0 \text{ et } z \geqslant 0 \end{cases}}_{1} \qquad \underbrace{\begin{cases} x^2+z^2=4 \\ y=0 \\ x+y \leqslant 2 \text{ et } z \geqslant 0 \end{cases}}_{2} \qquad \underbrace{\begin{cases} x^2+z^2=4 \\ z=0 \\ y \geqslant 0 \text{ et } x+y \leqslant 2 \end{cases}}_{3}$$

• Le système 2 équivaut à $\begin{cases} x^2+z^2=4 \\ y=0 \\ x \leqslant 2 \text{ et } z \geqslant 0 \end{cases}$ (avec la condition $x \leqslant 2$ automatiquement satisfaite) et définit donc le demi-cercle supérieur de rayon 2 dans le plan (xOz).

• Le système 3 équivaut à $\begin{cases} x = \pm 2 \\ z=0 \\ 0 \leqslant y \leqslant 2-x \end{cases}$ et produit deux résultats différents : lorsque $x=2$ alors $y=0$ et on obtient seulement un point de coordonnées $(2,0,0)$. Lorsque $x=-2$ alors on a $0 \leqslant y \leqslant 4$ qui produit l'arête rectiligne parallèle à l'axe (Oy)

• Le système 1 est une intersection cylindre/plan et nous indique qu'il faut relier les deux sommets $(2,0,0)$ et $(-2,4,0)$ par une courbe elliptique contenue dans la surface du cylindre



Cependant la figure n'est pas nécessaire pour effectuer les calculs demandés.
Utilisons une paramétrisation de S en coordonnées cylindriques :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\varphi, y) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ y \\ 2\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

On a $z > 0 \Rightarrow \boxed{\varphi \in]0, \pi[}$ et $0 < y < 2 - x \Rightarrow \boxed{y \in]0, 2 - 2\cos\varphi[}$.
Le nouveau de définition de Φ est donc $\Delta = \{(\varphi, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < \varphi < \pi$ et $0 < y < 2 - 2\cos\varphi\}$.

• On calcule $\vec{t_\varphi}, \vec{t_y}$ puis $||\vec{t_\varphi} \wedge \vec{t_y}||$:

$$\vec{t_\varphi} = \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}(\varphi, y) = \begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ 0 \\ 2\cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{t_y} = \frac{\partial\Phi}{\partial y}(\varphi, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{t_\varphi} \wedge \vec{t_y} = \begin{pmatrix} -2\cos\varphi \\ 0 \\ -2\sin\varphi \end{pmatrix}$$

On obtient $||\vec{t_\varphi} \wedge \vec{t_y}|| = \sqrt{4\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi} = \sqrt{4} = \boxed{2}$.

On peut passer au calculs :

$$\mathcal{A}ire(S) = \iint\limits_{\Delta} ||\vec{t_\varphi} \wedge \vec{t_y}||\, d\varphi dy = \int_0^\pi \left(\int_0^{2-2\cos\varphi} 2dy \right) d\theta = \int_0^\pi 2(2 - 2\cos\varphi)\, d\varphi = \Big[4\varphi - 2\sin\varphi\Big]_0^\pi = 4\pi.$$

L'ordonnée du centre de gravité est

$$\begin{aligned} y_G = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S} y\, d\sigma = \iint\limits_{\Delta} y \times ||\vec{t_\varphi} \wedge \vec{t_y}||\, d\varphi dy &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \left(\int_0^{2-2\cos\varphi} 2y\ dy \right) d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi (2 - 2\cos\phi)^2\, d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi (4 - 8\cos\varphi + 4\cos^2\varphi)\, d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi (2 - 2\cos\phi)^2\, d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \left(4 - 8\cos\varphi + 2(1 + \cos(2\varphi))\right)\, d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi} \Big[4\varphi - 8\sin\varphi + 2\varphi + \sin(2\varphi)\Big]_0^\pi \\ &= \frac{6\pi}{4\pi} = \boxed{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

On peut poursuivre avec le calcul de x_G et z_G :
L'abscisse du centre de gravité est

$$\begin{aligned}
x_G = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S x\,d\sigma = \iint\limits_\Delta 2\cos\varphi \times ||\vec{t_\varphi} \wedge \vec{t_y}||\,d\varphi dy &= \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \left(\int_0^{2-2\cos\varphi} 4\cos\varphi\;dy\right)d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi 4\cos\varphi \times (2-2\cos\varphi)\,d\varphi \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (2\cos\varphi - 2\cos^2\varphi)\,d\varphi \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \big(2\cos\varphi - 1 - \cos(2\varphi)\big)\,d\varphi \\
&= \frac{1}{\pi}\Big[2\sin\varphi - \varphi - \frac{\sin(2\varphi)}{2}\Big]_0^\pi \\
&= \frac{-\pi}{\pi} = \boxed{-1}.
\end{aligned}$$

La hauteur du centre de gravité est

$$\begin{aligned}
z_G = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S z\,d\sigma = \iint\limits_\Delta 2\sin\varphi \times ||\vec{t_\varphi} \wedge \vec{t_y}||\,d\varphi dy &= \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \left(\int_0^{2-2\cos\varphi} 4\sin\varphi\;dy\right)d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi 4\sin\varphi \times (2-2\cos\varphi)\,d\varphi \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (2\sin\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi)\,d\varphi \\
&= \frac{1}{\pi}\Big[-2\cos\varphi - \sin^2\varphi\Big]_0^\pi \\
&= \frac{2-(-2)}{\pi} = \boxed{\frac{4}{\pi}}.
\end{aligned}$$