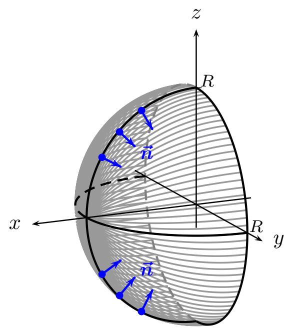
Cours MT22 - Chapitre 7

Exercice A.1.13 du poly Orientation des surfaces.

Cas des surfaces ouvertes.

1. On considère la demi-sphère définie par $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ avec $x \geqslant 0$.



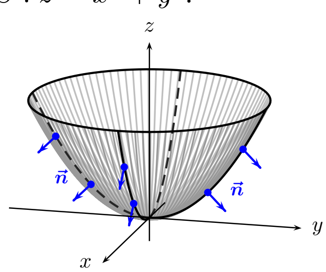
On souhaite orienter S par la donnée du champ des normales unitaires $\vec{n}$ réalisant un angle obtu avec le demi-axe $[Ox)$. Cela signifie que la 1ère composante de $\vec{n}$ doit être négative.
Le chapitre 3 fournit deux méthodes pour calculer un vecteur normal à la surface. L'une utilise l'équation implicite des surfaces :

$$\vec{N} = \pm\nabla f \quad \text{où } f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

On obtient $\vec{N} = \pm \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$. La condition $x \geqslant 0$ nous permet de conclure qu'il faut choisir

$$\vec{N} = -\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \text{Le vecteur unitaire est alors } \boxed{\vec{n} = \frac{\vec{N}}{||\vec{N}||}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

2. On considère le paraboloïde défini par $S : z = x^2 + y^2$.



On souhaite orienter S par la donnée du champ des normales unitaires $\vec{n}$ réalisant un angle obtu avec le demi-axe $[Oz)$. Cela signifie que la 3ème composante de $\vec{n}$ doit être négative.
On calcule $\vec{N} = \pm\nabla f$ où $f(x,y,z) = z - x^2 - y^2 = 0$. On obtient

$$\vec{N} = \pm \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il faut donc choisir

$$\vec{N} = -\begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \text{Le vecteur unitaire est alors } \boxed{\vec{n} = \frac{\vec{N}}{||\vec{N}||}} = \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. On considère cette fois le plan $S : 2x - 3y + 5z = 8$.
On souhaite orienter S par la donnée du champ des normales unitaires $\vec{n}$ réalisant un angle aigu avec le demi-axe $[Oy)$. Cela signifie que la 2$^{\text{ème}}$ composante de $\vec{n}$ doit être positive.
On calcule $\vec{N} = \pm\nabla f$ où $f(x, y, z) = 2x - 3y + 5z - 8 = 0$. On obtient

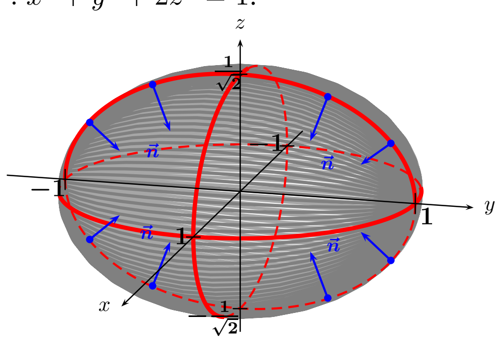
$$\vec{N} = \pm \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Il faut donc choisir

$$\vec{N} = -\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \text{Le vecteur unitaire est alors } \boxed{\vec{n} = \frac{\vec{N}}{||\vec{N}||}} = \frac{1}{\sqrt{38}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Cas des surfaces fermées.

4. On considère le paraboloïde $S : x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$.



On souhaite orienter S par la donnée du champ des normales unitaires $\vec{n}$ dirigé vers l'intérieur de la surface.
À l'aide de la figure on traduit cette condition en caractérisation le signe d'une composante de $\vec{n}$.
On observe que

- Si $z \geqslant 0$ alors le vecteur normal unitaire $\vec{n}$ au point $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ admet une 3$^{\text{ème}}$ composante négative (vecteur dirigé vers le bas).
- Si $z \leqslant 0$ alors le vecteur normal unitaire $\vec{n}$ au point $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ admet une 3$^{\text{ème}}$ composante positive (vecteur dirigé vers le haut).

On calcule $\vec{N} = \pm\nabla f$ où $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 1 = 0$. On obtient

$$\vec{N} = \pm \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 4z \end{pmatrix}$$

• Si on se place dans le cas où $z \geqslant 0$ alors il faut donc choisir

$$\vec{N} = -\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 4z \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \text{Le vecteur unitaire est alors } \boxed{\vec{n} = \frac{\vec{N}}{||\vec{N}||}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2z \end{pmatrix}.$$

• Ce choix doit nécessairement satisfaire l'autre cas de figure avec $z \leqslant 0$.

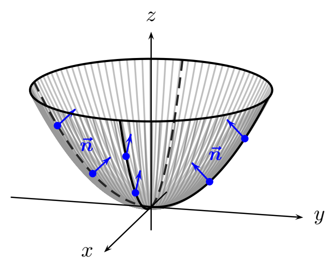
Exercice A.1.14 du poly

Exercice A.1.15 du poly Calculer le flux de $\vec{V} = \begin{pmatrix} xz \\ z \\ -\frac{z^2}{2} \end{pmatrix}$ à travers la surface

$$S : \quad z = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant z \leqslant 1.$$

Le champ des normales unitaires à la surface S doivent avoir une 3ème composante positive.

Correction.
1.



2. *(Il s'agit de déterminer l'expression de $\vec{N}$).*
Une paramétrisation de S est

$$M \in S \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } 0 \leqslant x^2 + y^2 = z \leqslant 1.$$

Le domaine de définition de Φ est donc le disque unité dans le plan (xOy) qui peut être décrit en coordonnées polaires par

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x = r\cos\theta, \ y = r\sin\theta, \ r \in [0,1] \text{ et } \theta = [0, 2\pi[\right\}.$$

Au chapitre 3, nous avons vu que le vecteur normal peut s'obtenir par la formule

$$\vec{N} = \pm \vec{t}_x \wedge \vec{t}_y = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'après l'énoncé, il faut choisir $\vec{N} = + \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}$.

On compose $\vec{V}$ avec Φ : $\vec{V} \circ \Phi(x,y) = \begin{pmatrix} x(x^2+y^2) \\ x^2+y^2 \\ -\frac{(x^2+y^2)^2}{2} \end{pmatrix}$.

Le flux de $\vec{V}$ à travers S est donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}lux_S(\vec{V}) = \iint_S \vec{V} \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma &= \iint_D \left(\vec{V} \circ \Phi(x,y) \right) \cdot \vec{N} \, dxdy \\
&= \iint_D \left(-2x^2(x^2+y^2) - 2y(x^2+y^2) - \tfrac{(x^2+y^2)^2}{2} \right) dxdy \\
&= \iint_{[0,1]\times[0,2\pi[} \left(-2r^2\cos^2\theta \times r^2 - 2r\sin\theta \times r^2 - \tfrac{r^4}{2} \right) \times r \, drd\theta \\
&= \int_0^1 \Big[-r^5 \left(\theta + \tfrac{\sin 2\theta}{2} \right) + 2r^4 \cos\theta - \tfrac{r^4}{2}\theta \Big]_0^2 \pi \, dr = \int_0^1 -3\pi \, r^5 \, dr = -3\pi \left[\tfrac{r^6}{6} \right]_0^1 = -\tfrac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$