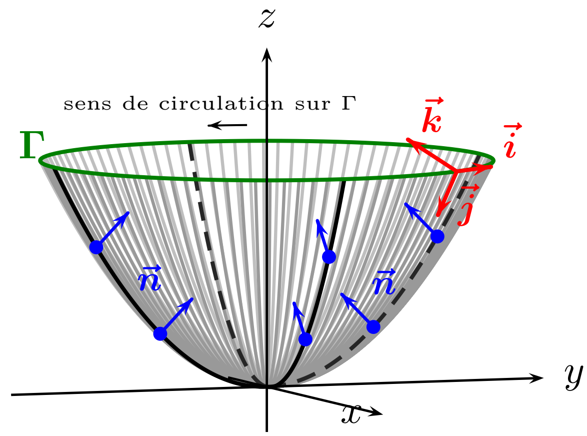
# Cours MT22 - Chapitre 8

**Exercice A.1.3 du poly - question 2.** On définit la surface $S$ d'équation $z = x^2 + y^2$ avec $z \leqslant 1$.
On oriente $S$ par les normales unitaires $\vec{n}$ qui font un angle aigu avec le demi axe $[Oz)$. On appelle $\Gamma$ le bord de $S$ orienté de façon cohérente avec $S$.

**Correction.**

**a)**




**b)** Le bord $\Gamma$ de $S$ est défini par le système

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Une paramétrisation de $\Gamma$ est alors

$$M \in \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \theta : 0 \to 2\pi.$$

**c)** La circulation de $\vec{U} = \begin{pmatrix} \frac{z^2(y-1)}{2} \\ 1 \\ xyz \end{pmatrix}$ le long de $\Gamma$ est donc

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \vec{U} \cdot \vec{d\ell} &= \int_\Gamma \tfrac{z^2(y-1)}{2}\, dx + dy + xyz\, dz \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta - 1}{2} \times (-\sin\theta)\, d\theta + \cos\theta d\theta + 0 d\theta \\
&= \Big[ -\frac{\theta}{4} + \frac{\sin 2\theta}{8} - \cos\theta + \sin\theta \Big]_0^{2\pi} = -\tfrac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

**d)** On doit vérifier l'égalité

$$\int_\Gamma \vec{U} \cdot \vec{d\ell} = \mathcal{Flux}_S(\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{U}) = \iint_S \overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{U} \cdot \vec{N}\, d\sigma.$$

On calcule

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{U}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{z^2(y-1)}{2} \\ 1 \\ xyz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xz \\ -z \\ -\frac{z^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Une paramétrisation de $S$ est

$$M \in S \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } 0 \leqslant x^2+y^2 = z \leqslant 1.$$

Le domaine de définition de $\Phi$ est donc le disque unité dans le plan $(xOy)$ qui peut être décrit en coordonnées polaires par

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; x = r\cos\theta,\; y = r\sin\theta,\; r \in [0,1] \text{ et } \theta = [0,2\pi[\right\}.$$

Au chapitre 3, nous avons vu que le vecteur normal peut s'obtenir par la formule

$$\vec{N} = \pm \vec{t}_x \wedge \vec{t}_y = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'après l'énoncé, il faut choisir $\vec{N} = +\begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}$.

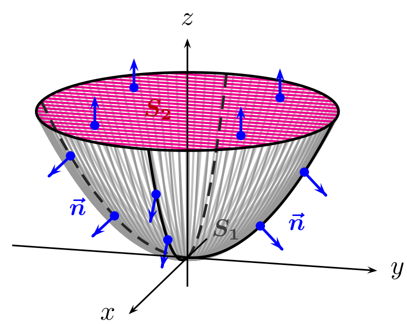
On compose $\vec{V}$ avec $\Phi$ : $\vec{V} \circ \Phi(x,y) = \begin{pmatrix} x(x^2+y^2) \\ -(x^2+y^2) \\ -\frac{(x^2+y^2)^2}{2} \end{pmatrix}$.

Le flux de $\vec{V}$ à travers $S$ est donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}lux_S(\vec{V}) = \iint_S \vec{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma &= \iint_D \left(\vec{V} \circ \Phi(x,y)\right) \cdot \vec{N}\, dxdy \\
&= \iint_D \left(-2x^2(x^2+y^2) + 2y(x^2+y^2) - \tfrac{(x^2+y^2)^2}{2}\right) dxdy \\
&= \iint_{[0,1]\times[0,2\pi[} \left(-2r^2\cos^2\theta \times r^2 + 2r\sin\theta \times r^2 - \tfrac{r^4}{2}\right) \times r\, dr d\theta \\
&= \int_0^1 \left[ -r^5\left(\theta + \tfrac{\sin 2\theta}{2}\right) - 2r^4\cos\theta - \tfrac{r^4}{2}\theta \right]_0^2 \pi\, dr \\
&= \int_0^1 -3\pi\, r^5\, dr = -3\pi\left[\tfrac{r^6}{6}\right]_0^1 = -\tfrac{\pi}{2} = \int_\Gamma \vec{U} \cdot \vec{d\ell}.
\end{aligned}$$

**Exercice A.1.8 du poly - questions 1, 2 et 3.**
Soit $\mathcal{V} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2 \leqslant z \leqslant 1\}$ et $S$ le bord du volume $\mathcal{V}$. On oriente $S$ vers l'extérieur de $\mathcal{V}$.

**Correction.**
**1.**




**2.** Le bord $S$ de $\mathcal{V}$ est constitué de deux surfaces : on écrit $S = S_1 \cup S_2$. Une paramétrisation de $S$ est

- $$M \in S_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi_1(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } 0 \leqslant x^2+y^2 = z \leqslant 1.$$

Le domaine de définition de $\Phi_1$ est donc le disque unité dans le plan $(xOy)$ qui peut être décrit en coordonnées polaires par
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x = r\cos\theta, \; y = r\sin\theta, \; r \in [0,1] \text{ et } \theta = [0, 2\pi[\right\}.$$

- $$M \in S_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi_2(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } (r,\theta) \in [0,1] \times [0, 2\pi[.$$

**3a)** Le Flux total s'obtient par la relation de Chasles :
$$\mathcal{Flux}_S(\vec{V}) = \mathcal{Flux}_{S_1}(\vec{V}) + \mathcal{Flux}_{S_2}(\vec{V}) \Leftrightarrow \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint_{S_1} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma + \iint_{S_2} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma.$$

- Le Flux de $\vec{V} = \begin{pmatrix} xz \\ z \\ -\frac{z^2}{2} \end{pmatrix}$ a déjà été calculé au chapitre 7, A.2.15 avec une orientation de $\vec{n}$ différente donc
$$\mathcal{Flux}_{S_1}(\vec{V}) = -\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) = \tfrac{\pi}{2}.$$

- Sur $S_2$, on transforme l'intégrand $\vec{V} \cdot \vec{n}$ :on a $\vec{n} = \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où
$$\vec{V} \cdot \vec{n} = -\frac{z^2}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{(car } z = 1 \text{ sur } S_2\text{)}.$$

On calcule le jacobien
$$\vec{t_r} \wedge \vec{t_\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \Rightarrow \quad ||\vec{t_r} \wedge \vec{t_\theta}|| = r$$

On obtient biensûr le même jacobien qu'au chapitre 4 pour le disque unité dans le plan $z = 0$.

Finalement,

$$\mathcal{F}lux_{S_2}(\vec{V}) = \iint\limits_{S_2} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi[} -\tfrac{1}{2} \times r\, drd\theta = -\tfrac{1}{2} \times \int_0^1 2\pi r\, dr = -\tfrac{1}{2} \times \Big[\pi r^2\Big]_0^1 = -\tfrac{\pi}{2}.$$

Le Flux total est donc

$$\mathcal{F}lux_S(\vec{V}) = \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{2} = 0.$$

**3b)** D'après le théorème de Gauss-Ostrogradski on doit avoir

$$\mathcal{F}lux_S(\vec{V}) = \iiint\limits_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\vec{V}(x,y,z)\, dxdydz.$$

Or ici,

$$\mathrm{div}\vec{V}(x,y,z) = \tfrac{\partial[xz]}{\partial x} + \tfrac{\partial[z]}{\partial y} + \tfrac{\partial[-\frac{z^2}{2}]}{\partial z} = z - z = 0 \Rightarrow \iiint\limits_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\vec{V}(x,y,z)\, dxdydz = \iiint\limits_{\mathcal{V}} 0\, dxdydz = 0.$$

D'où l'égalité.

**Exercice A.2.1 du chap8 - question 2 /Exercice A.2.4 du chap7 - question 1**

**Chapitre 7. Exercice A.2.4 - question 1**

**1.** On utilise une paramétrisation en coordonnées sphériques de $\Sigma$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = R\cos\varphi\sin\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\theta \end{array} \right. \qquad \text{avec } \varphi \in [0, 2\pi[ \text{ et } \theta \in [0, \pi].$$

Le vecteur normal dirigé vers l'extérieur (voir note de cours1 du chap7) est $\vec{N} = +\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_\varphi = R^2 \sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$.

Dans ce système de coordonnées, le champ de vecteur $\vec{V}(x, y, 0)$ s'écrit $\vec{V} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\sin\theta \\ R\sin\varphi\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$. Le flux de $\vec{V}$ à travers $\Sigma$ est donc

$$\begin{aligned} \text{Flux}_\Sigma(\vec{V}) = \iint_{[0,2\pi[\times[0,\pi]} \vec{V} \cdot \vec{N} d\varphi d\theta &= \iint_{[0,2\pi[\times[0,\pi]} R^3 \sin^3\theta \; d\varphi d\theta = R^3 \times 2\pi \int_0^\pi \sin\theta(1 - \cos^2\theta) d\theta \\ &= 2\pi R^3 \Big[ -\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} \Big]_0^\pi \\ &= \boxed{\frac{8\pi R^3}{3}}. \end{aligned}$$

**Chapitre 8. Exercice A.2.1 - question 2**

Puisque la surface $\Sigma$ est fermée et orientée par le champ des normales extérieures, on peut retrouver ce résultat grâce au théorème de Gauss-Ostrogradski

$$\text{Flux}_\Sigma(\vec{V}) = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div}\, \vec{V}(x, y, z)\, dxdydz,$$

où $\mathcal{V}$ est la volume fini, délimité par $\Sigma$. Ici $\text{div}\, \vec{V}(x, y, z) = 2$ donc

$$\text{Flux}_\Sigma(\vec{V}) = 2 \iiint_{\mathcal{V}} 1\, dxdydz = 2 \times Vol(\mathcal{V}) = 2 \times \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{8\pi R^3}{3}.$$

Le calcul du volume d'une boule de rayon R se démontre par un changement de variable en coordonnées sphériques.