Cours MT22 - Chapitre 1

Exemple 1. Calculer les dérivées partielles en tout point de $\begin{cases} f(x,y) = \frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Correction. (ii) En $(0,0)$:

$$\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = 0 \underset{h \to 0}{\to} 0$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

$$\frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \frac{\frac{k^3}{k^2} - 0}{k} = 1 \underset{k \to 0}{\to} 1$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$.
(i) Sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Comme quotient de polynôme, la fonction admet des dérivées partielles premières en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^3 \times \underbrace{\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)'}_{\text{écriture interdite}} = y^3 \times \left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right) = -\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^2(x^2+y^2) - 2y(y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3y^2x^2 + y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

Exemple 2. Montrons que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^2$ est différentiable en tout point $M_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Correction. (i) Les valeurs de A et B sont données par les dérivées partielles de f en (x_0, y_0).

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0 = A, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0 = B$$

(ii) On cherche $\varepsilon(h,k)$ tel que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + 2x_0 h + 2y_0 k + \sqrt{h^2 + k^2}\varepsilon(h,k).$$

$$(x_0 + h)^2 + (y_0 + k)^2 = x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 h + 2y_0 k + \sqrt{h^2 + k^2}\varepsilon(h,k)$$

$$\varepsilon(h,k) = \frac{(x_0 + h)^2 + (y_0 + k)^2 - (x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 h + 2y_0 k)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

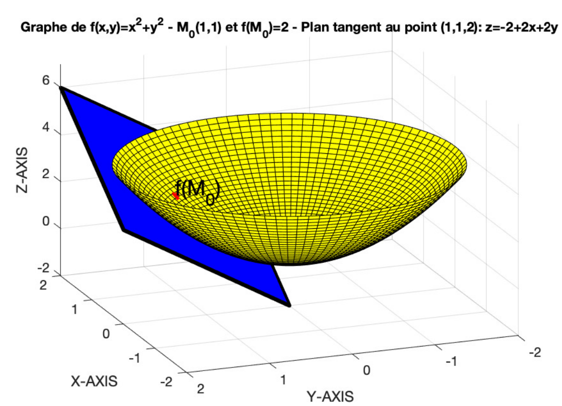
(iii) On vérifie si $\lim\limits_{||(h,k)|| \to 0} \varepsilon(h,k) = 0$.
On impose $\varepsilon(0,0) = 0$. Ainsi on applique la méthodologie du paragraphe II pour démontrer que ε est continue en $(0,0)$.
On passe en coordonnées polaires au voisinage de $(0,0)$: $h = r\cos\theta$ et $k = r\sin\theta$.

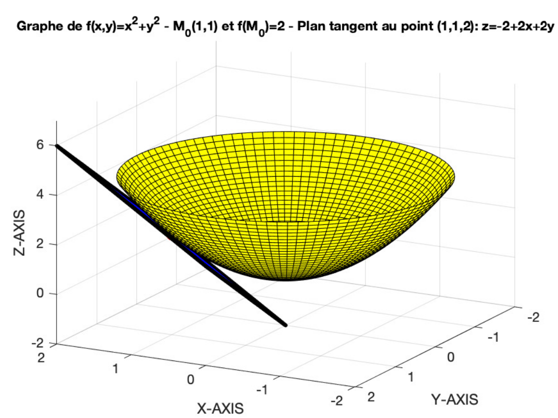
$$\varepsilon(h,k) = \frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} \Leftrightarrow \varepsilon(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2}{r} = r$$

$$\forall\, r \in \mathbb{R}_+, \forall \theta \in [0, 2\pi[, |\varepsilon(r\cos\theta, r\sin\theta) - \varepsilon(0,0)| = r \leq r = g(r) \underset{r \to 0}{\to} 0$$

La C. S. de continuité est démontrée pour ε donc $\lim\limits_{||(h,k)|| \to 0} \varepsilon(h,k) = 0$.

NB : $$||(h,k)|| \to 0 \Leftrightarrow (h,k) \to (0,0)$$





Exemple 3. Poursuivre l'étude de la différentiabilité et de la continuité des dérivées partielles de
$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Correction. On a montré que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. On sait que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^2x^2+y^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 \end{cases}$$

(i) Étude de la différentiabilité.
• Pour $(x,y) \neq (0,0)$. L'expression $(x,y) \mapsto \frac{y^3}{x^2+y^2}$ est un quotient de polynôme donc différentiable en tout point de son domaine de définition, à savoir $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
• Pour $(x,y) = (0,0)$. On a $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et $B = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$.
On calcule ε tel que

$$f(0+h, 0+k) = f(0,0) + Ah + Bk + \sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(h,k) = \frac{f(h,k) - k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\frac{k^3}{h^2+k^2} - k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\frac{k^3 - k(h^2+k^2)}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{-kh^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On vérifie si $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$. On impose $\varepsilon(0,0) = 0$ et on vérifie si la condition suffisante de continuité est satisfaite.
On pose $h = r\cos\theta$ et $k = r\sin\theta$:

$$\varepsilon(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{-r^3 \sin\theta \cos^2\theta}{(r^2)^{\frac{3}{2}}} = -\sin\theta\cos^2\theta$$

Les limites directionnelles quand $r \to 0$ dépendent de θ donc on peut pas démontrer la continuité de ε.
Montrons que ε n'est pas continue en $(0,0)$.
Prenons le chemin $x = y$ décrit par la fonction

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \Phi(0) = (0,0)$$

et Φ est continue en $t = 0$. On calcule

$$\varepsilon \circ \Phi(t) = \varepsilon(t,t) = -\frac{t^3}{(2t^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{t^3}{2t^2\sqrt{2t^2}} = -\frac{t^3}{2^{\frac{3}{2}} t^2 |t|}$$

Pour $t > 0$, on a $\varepsilon \circ \Phi(t) = -\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \underset{t\to 0^+}{\to} -\frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$.
On en déduit que f n'est pas différentiable.

(ii) Étude de la continuité des dérivées partielles.
• Pour $(x,y) \neq (0,0)$. Les expressions $(x,y) \mapsto -\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$ et $(x,y) \mapsto \frac{3y^2x^2+y^4}{(x^2+y^2)^2}$ sont des quotients de polynômes donc elles définissent des fonctions continues sur leur domaine de définition, à savoir $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

• Pour $(x,y)=(0,0)$. On doit verifier si $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1$.

Pour $\frac{\partial f}{\partial x}$, en coordonnées polaires on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) = -\frac{2r^4\cos\theta\sin^3\theta}{r^4} = -2\cos\theta\sin^3\theta.$$

Les limites directionnelles quand $r\to 0$ dépendent de θ donc on peut pas démontrer la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$. Prenons le chemin d'équation $x=y$ décrit par la fonction

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \Phi(0)=(0,0)$$

et Φ est continue en $t=0$. On calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x}\circ\Phi(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,t) = -\frac{2t^4}{(2t^2)^2} = -\frac{1}{2} \underset{t\to 0}{\to} -\frac{1}{2} \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

Pour $\frac{\partial f}{\partial y}$, en coordonnées polaires on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{3r^4\sin^2\theta\cos^2\theta + r^4\sin^4\theta}{(r^2)^2} = 3\sin^2\theta\cos^2\theta + \sin^4\theta.$$

Les limites directionnelles quand $r\to 0$ dépendent de θ donc on peut pas démontrer la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$. Prenons le chemin d'équation $y=\sqrt{3}x$ décrit par la fonction

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{3}t \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \Phi(0)=(0,0)$$

et Φ est continue en $t=0$. On calcule

$$\frac{\partial f}{\partial y}\circ\Phi(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(t,t) = \frac{18t^4}{(4t^2)^2} = \frac{9}{8} \underset{t\to 0}{\to} \frac{9}{8} \neq \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1.$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(0,0)$ non plus.

Exemple 4. Calculer les dérivées partielles secondes de $f(x, y) = y^3 \cos x$ en tout point de $D = \mathbb{R}^2$. Que remarque-t-on ?

Correction. La fonction f est au moins de classe $\mathscr{C}^2$ par composition de fonctions usuelles sur $\mathbb{R}^2$. On commence par les dérivées partielles premières

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^3(-\sin x) \quad \text{ et } \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 \cos x.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) = -y^3 \cos x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = 6y \cos x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) = -3y^2 \sin x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = -3y^2 \sin x
\end{aligned}$$

On observe que les dérivées partielles croisées sont égales. Cela vient du théorème de symétrie de Schwarz pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ au moins.