Cours MT22 - Chapitre 1

Exemple. Calculer les dérivées partielles croisées d'ordre 3 de $f(x, y) = y^3 \cos x$.

Correction. Les dérivées partielles d'ordre 3 sont

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

On reprend les résultats du cours précédent sur les dérivées partielles secondes.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-y^3 \cos x\right) = y^3 \sin x$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-3y^2 \sin x\right) = -3y^2 \cos x$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-3y^2 \sin x\right) = -3y^2 \cos x$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-y^3 \cos x\right) = -3y^2 \cos x$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(6y \cos x\right) = -6y \sin x$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-3y^2 \sin x\right) = -6y \sin x$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-3y^2 \sin x\right) = -6y \sin x$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(6y \cos x\right) = 6 \cos x$$

On remarque que

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2},$$

et

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}.$$

Pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ au moins, l'ordre de dérivation des dérivées partielles d'ordre au plus k n'importe pas.

La réciproque de la condition nécessaire d'optimalité est fausse.
contre-exemple. Considérons la fonction définie par $f(x, y) = xy$ en $M_0(0, 0)$.

On calcule les dérivées partielles premières :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x.$$

Au point $M_0(0, 0)$, on a bien $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0. \end{cases}$

Pourtant M_0 ne réalise pas un extremum local de f. Pour tout $\eta > 0$, les points de coordonnées $M(x, x)$ avec $|x| < \sqrt{\frac{\eta}{2}}$ vérifient

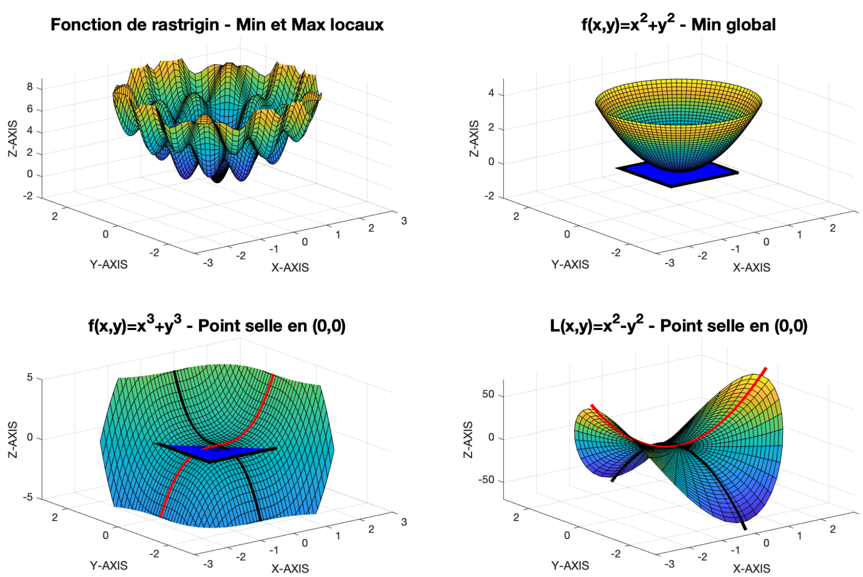
$$M \in B(M_0, \eta) \quad \text{et} \quad f(M) = f(x, x) = x^2 \geq 0 = f(0, 0) = f(M_0).$$

Et les points de coordonnées $M(x, -x)$ avec $|x| < \sqrt{\frac{\eta}{2}}$ vérifient

$$M \in B(M_0, \eta) \quad \text{et} \quad f(M) = f(x, -x) = -x^2 \leq 0 = f(0, 0) = f(M_0).$$

Donc à l'intérieur du disque $B(M_0, \eta)$, la différence $f(M) - f(M_0)$ change de signe.
On en déduit que M_0 ne réalise ni un minimum local, ni un maximum local de f.

Les solutions (x_*, y_*) du système $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_*, y_*) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_*, y_*) = 0 \end{cases}$ ne sont pas toutes des extrema locaux.



• En haut à gauche, vous visualisez le graphe d'un fonction admettant une infinité de minima et de maxima locaux, avec un minimum global en $(0, 0)$.
• En bas, à gauche, vous visualisez le graphe d'une fonction dont $M_0(0, 0)$ est un point critique satisfaisant $\widetilde{\Delta} = b^2 - ac = 0$. Ce n'est pas un extremum local car la fonction prend des valeurs supérieures et inférieures à $f(0, 0) = 0$ au voisinage de $(0, 0)$.
• En bas, à droite, vous visualisez le graphe d'une fonction dont $M_0(0, 0)$ est un point critique satisfaisant $\widetilde{\Delta} = 4 > 0$. C'est un point selle. La forme du graphe justifie le nom donné à ce type de point critique.

Exemple sur la recherche d'extrema locaux. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

Correction. (i) On résout le système $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array} \right.$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 2x + y = 3 & (L_1) \\ x + 2y = 6 & (L_2) \end{array} \right.$$

$$(L_2) - 2 \times (L_1) \quad \Rightarrow \quad -3x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$(L_1) - 2 \times (L_2) \quad \Rightarrow \quad -3y = -9 \quad \Rightarrow \quad y = 3$$

Le système admet donc une unique solution $(0,3)$, appelée point critique de f.

(ii) Comme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, on vérifie s'il s'agit d'un extremum local à l'aide de développement de T-Y à l'ordre 2. On calcule les dérivées partielles secondes :

$$a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \quad b = \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1, \quad c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2.$$

NB : les expressions des dérivées partielles secondes ne sont pas constantes dans le cas général. Il faut alors calculer $\widetilde{\Delta} = b^2 - ac$ en remplaçant (x,y) par les coordonnées du (ou des) point(s) critique(s) que vous avez trouvé.

Pour $(0,3)$, on a $\widetilde{\Delta} = (1^2) - 2 \times 2 = -3 < 0$. Il s'agit bien d'un extremum local. La valeur de $a = 2 > 0$ nous permet de préciser qu'il s'agit d'un minimum local.

Exercice. Déterminer les dérivées partielles des fonctions suivantes

1. $F(x,y) = \cos(x+y)$
2. $G(t) = F(e^t, \operatorname{Arctan} t)$
3. $H(x,y) = F(xy, 2x-3y)$

Correction.

1. La fonctions $(x,y) \mapsto x+y$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et cos est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc F est aussi dérivable sur $\mathbb{R}^2$. Les dérivées partielles sont

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial (x+y)}{\partial x} \times \cos'(x+y) = 1 \times (-\sin(x+y)) = -\sin(x+y).$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial (x+y)}{\partial y} \times \cos'(x+y) = 1 \times (-\sin(x+y)) = -\sin(x+y).$$

2. La fonction F est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et les fonctions $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto \operatorname{Arctan} t$ sont dérivable sur $\mathbb{R}$ donc G est dérivable sur $\mathbb{R}^2$. La dérivée de G est définie par

$$\begin{aligned} G'(t) &= (e^t)' \times \frac{\partial F}{\partial x}(e^t, \operatorname{Arctan} t) + \operatorname{Arctan}' t \times \frac{\partial F}{\partial y}(e^t, \operatorname{Arctan} t) \\ &= \left(e^t + \frac{1}{1+t^2}\right) \times \sin(e^t + \operatorname{Arctan} t). \end{aligned}$$

3. On considère H comme la composée de $F : (t,s) \mapsto \sin(t+s)$ avec $\varphi_1(x,y) = xy$ et $\varphi_2(x,y) = 2x-3y$. Ces trois fonctions sont toutes différentiables sur $\mathbb{R}^2$ donc H aussi. Les dérivées partielles sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial (xy)}{\partial x} \times \frac{\partial F}{\partial t}(xy, 2x-3y) + \frac{\partial (2x-3y)}{\partial x} \times \frac{\partial F}{\partial s}(xy, 2x-3y) \\ &= y\frac{\partial F}{\partial t}(xy, 2x-3y) + 2\frac{\partial F}{\partial s}(xy, 2x-3y) = -(y+2)\sin(xy+2x-3y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial (xy)}{\partial y} \times \frac{\partial F}{\partial t}(xy, 2x-3y) + \frac{\partial (2x-3y)}{\partial y} \times \frac{\partial F}{\partial s}(xy, 2x-3y) \\ &= x\frac{\partial F}{\partial t}(xy, 2x-3y) - 3\frac{\partial F}{\partial s}(xy, 2x-3y) = -(x-3)\sin(xy+2x-3y) \end{aligned}$$