Cours MT22 - Chapitre 2

Exemple 1. Prenons $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ qui admet un minimum global en l'origine.
Partant du point $M_0(-2, 0)$ observons la descente de gradient à pas constant $t = 0.1$ ...

En suivant la direction opposée à celle du gradient dans le domaine de définition de f, on définit une suite de point vérifiant

$$f(M_0) = 5.$$

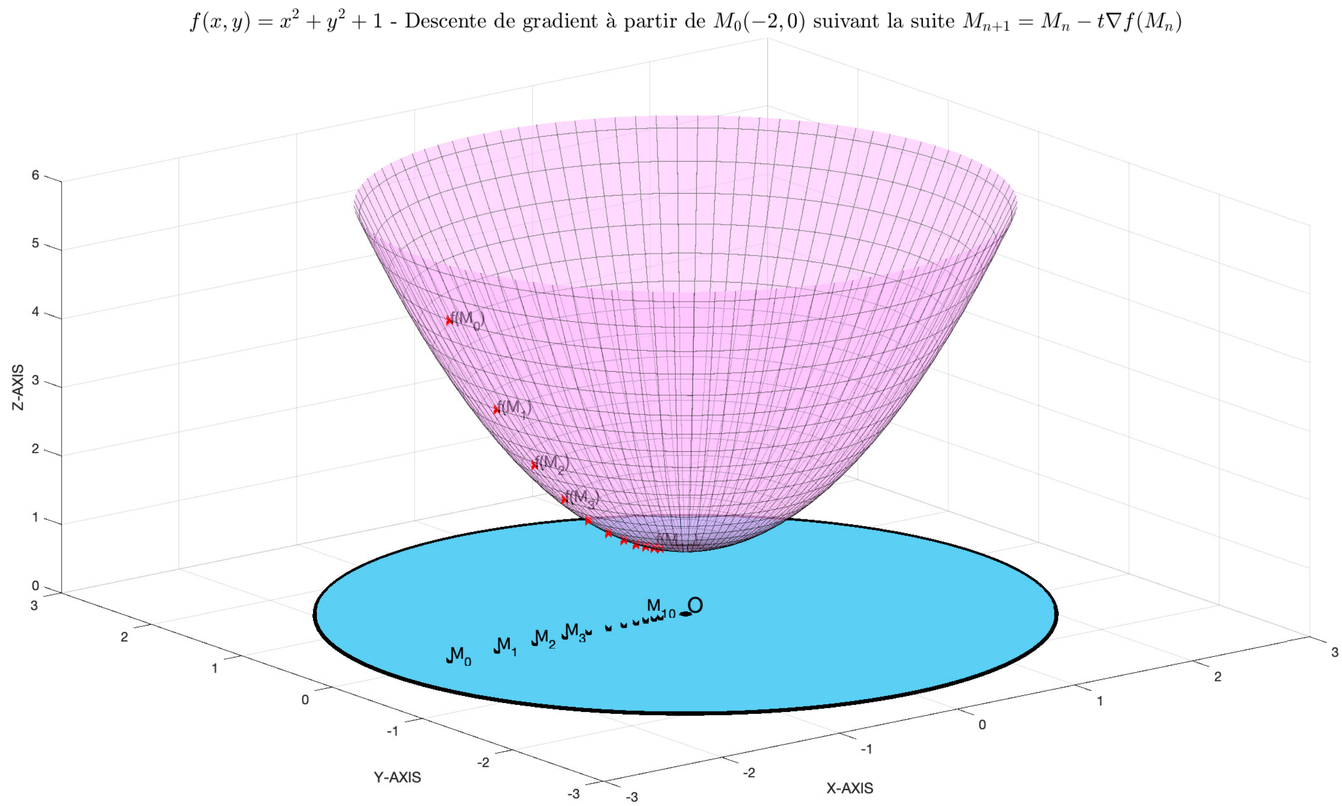
$$M_1 = M_0 - t\nabla f(M_0) = (-1.6, 0) \Rightarrow f(M_1) \approx 3.56 < f(M_0)$$

$$M_2 = M_1 - t\nabla f(M_1) = (-1.28, 0) \Rightarrow f(M_2) \approx 2.64 < f(M_1)$$

$$M_3 = M_2 - t\nabla f(M_2) = (-1.024, 0) \Rightarrow f(M_3) \approx 2.05 < f(M_2)$$

$$\vdots$$

La suite de point converge vers l'origine réalisant le minimum global de f.



Exemple. Soit $\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}$. Calcul du rotationnel et visualisation graphique.

NB : Dans un produit vectoriel, la distribution des dérivées partielles sur les composantes de $\vec{V}$ s'effectue comme le test de colinéarité (soustraction des produits en croix) :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ est colinéaire à } \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ad - bc = 0.$$

On démarre à partir de la deuxième ligne :

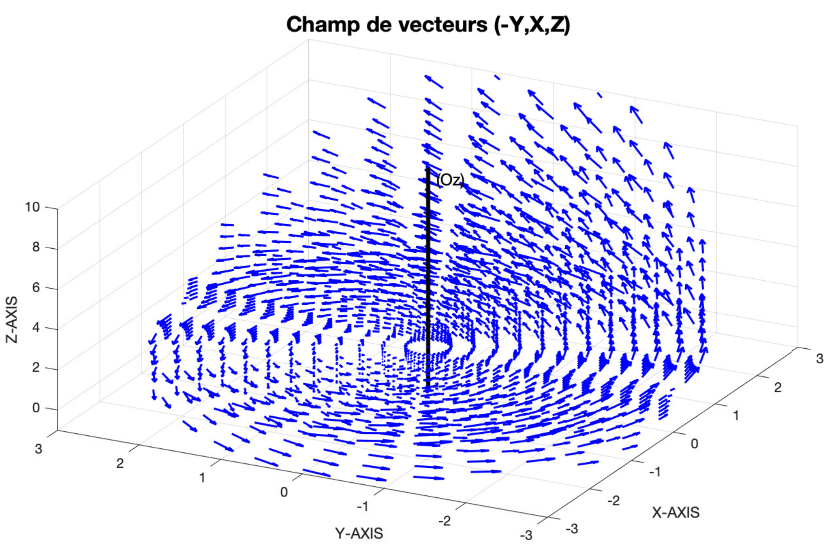
Correction.

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{V}(x,y,z) = \nabla \wedge \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{array}{c} ③ \\ ① \\ ② \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \wedge \begin{array}{c} \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix} \\ P(x,y,z) \end{array} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) - \frac{\partial R}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

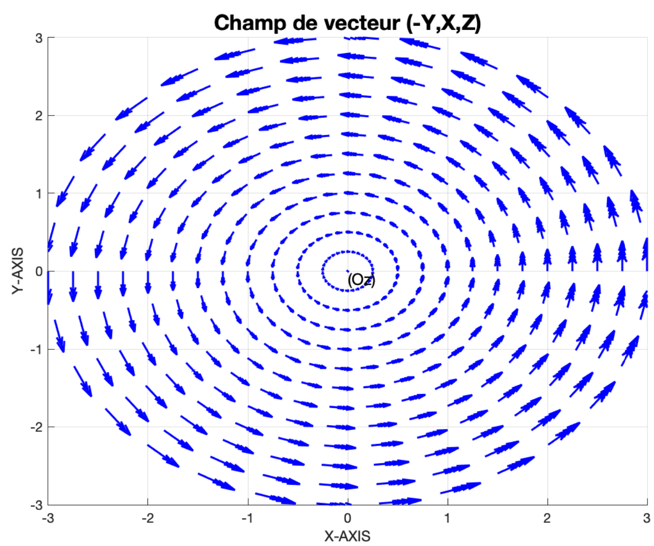
Dans l'exercice on obtient,

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial[\,z\,]}{\partial y} - \frac{\partial[\,x\,]}{\partial z} \\ \frac{\partial[-y]}{\partial z} - \frac{\partial[\,z\,]}{\partial x} \\ \frac{\partial[\,x\,]}{\partial x} - \frac{\partial[-y]}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dans l'espace de repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{V}(x,y,z) = 2\vec{k}$, vecteur directeur de l'axe (Oz). Sur le graphique ci-dessous, vous pouvez vérifier que le champ de vecteur $\vec{V}$ est en rotation autour de l'axe (Oz).



Vue 3D du champ de vecteur $\vec{V}$



Vue du dessus (observateur face à l'axe (Oz))

Formule : Pour f de classe $\mathscr{C}^2$, montrons que $\boxed{\Delta f(x,y) = \operatorname{div}(\nabla f)(x,y)}$.

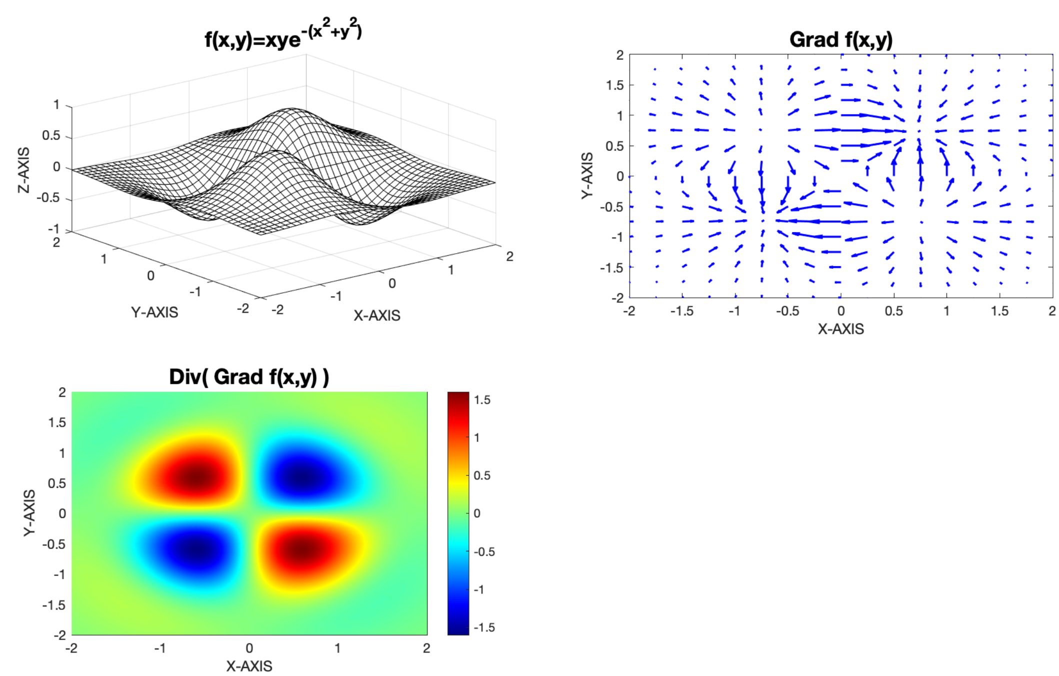
preuve : Le gradient de f est $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$. En appliquant l'opérateur de divergence à ce champ de vecteur, on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\nabla f)(x,y) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \Delta f(x,y). \end{aligned}$$

Interprétation.

① Le signe $\Delta f(M_0) > 0$ indique que le graphe de f est local$^{\text{t}}$ convexe au voisinage de M_0,
② la valeur $\Delta f(M_0) = 0$ indique que le graphe de f est local$^{\text{t}}$ plat au voisinage de M_0,
③ le signe $\Delta f(M_0) < 0$ indique que le graphe de f est local$^{\text{t}}$ concave au voisinage de M_0,

Visualisation graphique.



• Le graphe de f (en haut à gauche) montre l'existence de deux maxima locaux et de deux minima locaux. Au voisinage des maxima locaux, le graphe est localement concave. Au voisinage des minima locaux, le graphe est localement convexe.
• En haut à droite, vous pouvez visualiser le champ de vecteurs gradients de f en quelques points du domaine de définition dans le plan (xOy). Vous observez deux comportement convergeant vers les antécédents des maxima locaux et deux comportements divergeant à partir des antécédents des minima locaux. Ceci corrobore les résultats présentés à la page 1 sur l'utilisation du vecteur gradient en optimisation.
• Les valeurs du Laplacien de f sont représentées en bas à gauche. Celui-ci est donc négatif au voisinage de maxima locaux (gradient localement convergeant) et positif au voisinage de minima locaux (gradient localement divergeant).

Exemple 1. Montrons que $\vec{V}(M) = O\vec{M} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dérive d'un potentiel scalaire.

• Tout d'abord on a $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial[z]}{\partial y} - \frac{\partial[y]}{\partial z} \\ \frac{\partial[x]}{\partial z} - \frac{\partial[z]}{\partial x} \\ \frac{\partial[y]}{\partial x} - \frac{\partial[x]}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On en déduit qu'il existe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $\vec{V} = \nabla f$.

•Un peu d'intuition (intégration partielle des composantes de $\vec{V}$) permet de trouver la forme générale des solutions $f(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

NB : Pour la recherche de f dans un cas plus général, se référer à l'exemple de la page suivante.

Exercice. Prenons $\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2\cos x \\ 2y\sin x + e^{2z} \\ 2ye^{2z} - z^2 \end{pmatrix}$.

1. vérifier que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire f.
2. déterminer f

Correction. On note que le champ de vecteur $\vec{V}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ au moins.

1. On vérifie si $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{V} = \vec{0}$. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial[2ye^{2z}-z^2]}{\partial y} - \frac{\partial[2y\sin x+e^{2z}]}{\partial z} \\ \frac{\partial[y^2\cos x]}{\partial z} - \frac{\partial[2ye^{2z}-z^2]}{\partial x} \\ \frac{\partial[2y\sin x+e^{2z}]}{\partial x} - \frac{\partial[y^2\cos x]}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2z} - (2e^{2z}) \\ 0-0 \\ 2y\cos x - (2y\cos x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit qu'il existe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $\vec{V} = \nabla f$.

2. (i) On commence par poser le système $\nabla f = \vec{V}$ composante par composante.

$$\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= y^2\cos x \quad (L_1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= 2y\sin x + e^{2z} \quad (L_2) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= 2ye^{2z} - z^2 \quad (L_3) \end{cases}$$

(ii) On intègre partiellement f par rapport à x en utilisant (L_1) :

$$(*) \qquad \boxed{f(x,y,z) = \int \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,dx} = y^2\sin x + C_1(y,z).$$

NB : la nouveauté ici réside dans l'écriture de la forme générale des primitives à travers l'introduction de la fonction $C_1(y,z)$ <u>*constante*</u> par rapport à la variable d'intégration x.

(iii) On dérive l'expression $(*)$ de f par rapport à y et on compare le résultat à (L_2) :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \cancel{2y\sin x} + \frac{\partial C_1}{\partial y}(y,z) \ = \ \cancel{2y\sin x} + e^{2z}.$$

On en déduit que $\frac{\partial C_1}{\partial y}(y,z) = e^{2z}$ qu'on intègre partiellement par rapport à y

$$C_1(y,z) = \int \frac{\partial C_1}{\partial y}(x,y,z)\,dy = \int e^{2z}\,dy = ye^{2z} + C_2(z),$$

où C_2 est une fonction à déterminer.

(iv) Avant de terminer on réécrit f

$$(**) \qquad f(x,y,z) = y^2\sin x + ye^{2z} + C_2(z).$$

On dérive l'expression $(**)$ de f par rapport à z et on compare le résultat à (L_3) :

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \cancel{2ye^{2z}} + C_2'(z) \ = \ \cancel{2ye^{2z}} - z^2.$$

D'où $C_2'(z) = -z^2 \Rightarrow C_2(z) = -\frac{z^3}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

<u>Conclusion :</u> Le potentiel scalaire f est défini par

$$\boxed{f(x,y,z) = y^2\sin x + ye^{2z} - \frac{z^3}{3} + C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$