Cours MT22 - Chapitre 2

Exemple 2. Considérons le champs de vecteurs $\vec{V}(M) = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$.

• Tout d'abord on a $\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\operatorname{div}\vec{V}(x,y,z) = \frac{\partial[z]}{\partial x} + \frac{\partial[x]}{\partial y} + \frac{\partial[y]}{\partial z} = 0+0+0$. On en déduit qu'il existe $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $\vec{V} = \overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{F}$.

On pose $\vec{F}(x,y,z) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} y^2 \\ z^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$. On a bien

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{F}(x,y,z) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial[x^2]}{\partial y} - \frac{\partial[z^2]}{\partial z} \\ \frac{\partial[y^2]}{\partial z} - \frac{\partial[x^2]}{\partial x} \\ \frac{\partial[z^2]}{\partial x} - \frac{\partial[y^2]}{\partial y} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2z \\ -2x \\ -2y \end{pmatrix} = \vec{V}(x,y,z).$$

NB. Qu'en est-il de la dimension $d = 2$?

• Notons $\overrightarrow{\mathbf{rot}}_3$ l'opérateur rotationnel vu en cours pour la dimension 3.

• Soit $\vec{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^1$ avec $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$. On passe du 3D au 2D en considérant le champ de vecteurs à 3 composantes $\vec{\vec{V}}(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $\overrightarrow{\mathbf{rot}}_3\vec{\vec{V}}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$. Le rotationnel devient un opérateur scalaire défini par

$$\operatorname{rot}_2\vec{V}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y).$$

• Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On peut aussi considérer le champ de vecteurs *(dual au précédent)* à 3 composantes $\vec{\vec{V}}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x,y) \end{pmatrix}$. Ainsi $\overrightarrow{\mathbf{rot}}_3\vec{\vec{V}}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}$. Le rotationnel devient un opérateur vectoriel défini pour des fonctions scalaires

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}_2\, f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix}.$$

• Les théorèmes du cours deviennent :

$$\operatorname{rot}_2\vec{V} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ de classe } \mathscr{C}^2 \text{ tq } \vec{V} = \nabla f.$$
$$\operatorname{div}\vec{V} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ de classe } \mathscr{C}^2 \text{ tq } \vec{V} = \overrightarrow{\mathbf{rot}}_2 f.$$