Cours MT22 - Chapitre 4

Exercice : A l'aide de la première formule de Fubini, déterminer le volume du tétraèdre (à base triangulaire) délimité par les demi-plans d'inéquations

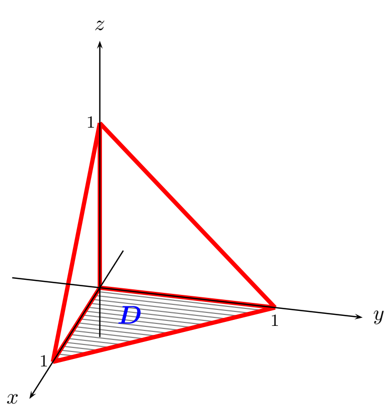
$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x+y+z \leqslant 1.$$

Correction. • On commence par tracer en perspective le tétraèdre : pour cela nous devons tracer ses 6 arêtes. Les inéquations définissent l'intérieur du tétraèdre.
Les cas d'égalité vous donnent les équations des 4 faces du tétraère : $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et $x + y + z = 1$.
Une arête correspondant à l'intersection de deux faces consécutives, on obtient les 6 arêtes en étudiant toutes les intersections possibles de 2 faces parmi les 4 :

$$\underset{①}{\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}}, \quad \underset{②}{\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}}, \quad \underset{③}{\begin{cases} x = 0 \\ x+y+z = 1 \end{cases}}, \quad \underset{④}{\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}}, \quad \underset{⑤}{\begin{cases} y = 0 \\ x+y+z = 1 \end{cases}} \quad \text{et} \quad \underset{⑥}{\begin{cases} z = 0 \\ x+y+z = 1 \end{cases}}$$

Le système ① définit l'axe (Oz)
Le système ② définit l'axe (Oy)
Le système ③ définit la droite d'équation $z = 1 - y$ dans le plan (yOz)
Le système ④ définit l'axe (Ox)
Le système ⑤ définit la droite d'équation $z = 1 - x$ dans le plan (xOz)
Le système ⑥ définit la droite d'équation $y = 1 - x$ dans le plan (xOy).

On obtient la figure suivante



• Le volume de ce solide, situé au-dessus du plan $z = 0$, s'obtient à l'aide de l'intégrale double

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy$$

où D est la projection orthogonale du tétraèdre sur le plan $z = 0$ et $f(x, y)$ est le second membre de l'équation explicite de la face supérieure (mise sous la forme $z = f(x, y)$). De cette façon, D correspondra au domaine de définition de la fonction f ainsi obtenue (cf chapitre 1).

• Le domaine D : on cherche toutes les contraintes satisfaites par les couples (x, y) à partir des inéquations définissant le tétraèdre : On a

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0,$$

et

$$z \geqslant 0 \text{ et } z \leqslant 1-x-y \Rightarrow \boxed{0 \leqslant 1-x-y}$$

Une figure dans le plan (xOy) permet de voir que le domaine D peut être défini par

$$\mathscr{D}\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 1-x\}.$$

• L'expression de f : on met sous forme explicite (càd en isolant z) l'équation de la face supérieur qui est $x+y+z=1 \Rightarrow z = 1-x-y$. Donc

$$\boxed{f(x,y) = 1-x-y.}$$

• Le volume du solide est donc

$$\begin{aligned}\iint_{\mathscr{D}} (1-x-y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)dy\right) dx &= \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \left((1-x)^2 - \tfrac{(1-x)^2}{2}\right) dx \\ &= \int_0^1 \tfrac{(1-x)^2}{2} dx \\ &= \left[-\frac{(1-x)^3}{6}\right]_0^1 \\ &= 0 - (-\tfrac{1}{6}) = \tfrac{1}{6}\ .\end{aligned}$$

Il s'agit d'une pyramide à base triangulaire dont le volume est

$$\frac{Aire(\mathscr{D}) \times h_{max}}{3} = \frac{(\frac{1\times 1}{2}) \times 1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Exercice : A l'aide de la seconde formule de Fubini, déterminer le volume du tétraèdre (à base triangulaire) délimité par les demi-plans d'inéquations

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x+y+z \leqslant 1.$$

Correction. • Le volume de ce solide est toujours donné par la formule

$$\iint_D (1-x-y)\,dxdy\ .$$

• Le domaine D : Une figure dans le plan (xOy) permet de voir que le domaine D peut être défini par

$$\mathscr{D}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\leqslant y\leqslant 1 \text{ et } 0\leqslant x\leqslant 1-y\}.$$

• Le volume du solide est donc

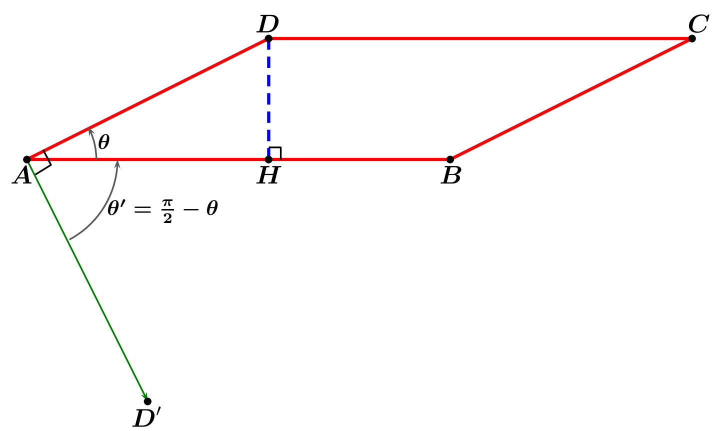
$$\begin{aligned}
\iint_{\mathscr{D}} (1-x-y)dxdy = \int_0^1\left(\int_0^{1-y}(1-y-x)dx\right)dy &= \int_0^1\left[(1-y)x-\frac{x^2}{2}\right]_0^{1-y}dy \\
&= \int_0^1\left((1-y)^2-\tfrac{(1-y)^2}{2}\right)dy \\
&= \int_0^1 \tfrac{(1-y)^2}{2}dy \\
&= \left[-\frac{(1-y)^3}{6}\right]_0^1 \\
&= 0-(-\tfrac{1}{6}) = \tfrac{1}{6}\ .
\end{aligned}$$

Remarque : • Soit $ABCD$ un parallélogramme dans le plan de repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Étant données les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}\binom{u_1}{v_1}$ et $\overrightarrow{AD}\binom{u_2}{v_2}$, on a $\mathcal{A}ire(ABCD) = \left|\det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}\right| = |u_1v_2 - v_1u_2|$ (cf MT23).

preuve : • Soit $ABCD$ un parallélogramme. L'aire se calcule par la formule

$$AB \times DH = AB \times AD \times \sin\theta$$

où H est le projeté orthogonal de D sur la droite (AB).



• Le déterminant $\det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} = u_1v_2 - v_1u_2$ se réécrit comme le produit scalaire suivant

$$\det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \binom{u_1}{v_1} \cdot \binom{v_2}{-u_2}.$$

Le vecteur de coordonnées $\binom{v_2}{-u_2}$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{AD}$ car

$$\binom{v_2}{-u_2} \cdot \binom{u_2}{v_2} = 0$$

et ils ont même longueur. Si on le représente à partir du point A, on obtient le vecteur $\overrightarrow{AD'}$ ci-dessus. On a donc

$$\det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD'} \quad \text{et} \quad ||\overrightarrow{AD}|| = ||\overrightarrow{AD'}||.$$

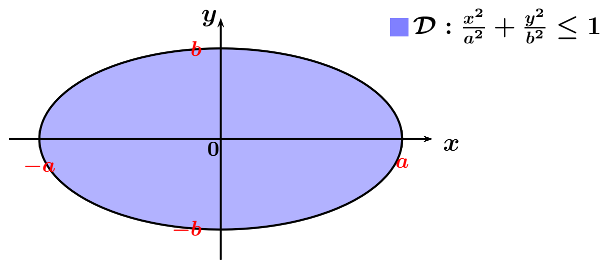
• Un produit scalaire se développe de la façon suivante

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD'} = AB \times AD' \times \cos\theta' = AB \times AD \times \cos(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = AB \times AD \times \sin\theta.$$

Exemple : Déterminer l'aire de la surface délimitée par une ellipse de rayons a sur (Ox) et b sur (Oy)

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}.$$

Correction. Le domaine D est le suivant



L'aire d'un domaine D est donné par la formule $\boxed{\mathcal{A}ire(D) = \iint_D 1\, dxdy}$.

• On pose le changement de variable suivant (qui est une paramétrisation vue au chapitre 3)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} a\cos\theta \times r \\ b\sin\theta \times r \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } r \in [0,1] \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[\ .$$

Remarque : la valeur $r = 1$ nous donne la paramétrisation du bord (l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$) et faire varier r de 0 à 1 nous permet de parcourir le domaine D du centre jusqu'au bord.

La nouveau domaine d'intégration pour les paramètres (r,θ) est un rectangle $\Delta = [0,1] \times [0, 2\pi[$.
Ce qui simplifie la transformation de l'intégrale double en suite d'intégrale simple.

• On compose f avec Φ :

$$f(x,y) = 1 \quad \Rightarrow f \circ \Phi(r,\theta) = f(ar\cos\theta, br\sin\theta) = 1$$

• Calcul du jacobien

$$J_\Phi(r,\theta) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial[ar\cos\theta]}{\partial r} & \frac{\partial[ar\cos\theta]}{\partial\theta} \\ \frac{\partial[br\sin\theta]}{\partial r} & \frac{\partial[br\sin\theta]}{\partial\theta} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{pmatrix} = abr\cos^2\theta - (-abr\sin^2\theta)$$

$$= abr(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \boxed{abr} \geqslant 0$$

On transforme l'intégrale double en (x,y) en une intégrale double en (r,θ)

$$\mathcal{A}ire(D) = \iint_D 1\, dxdy = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi[} 1 \times abr\, dr d\theta = ab\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r d\theta\right) dr = ab\int_0^1 \Big[r\theta\Big]_0^{2\pi} dr$$

$$= ab\int_0^1 2\pi r\, dr$$

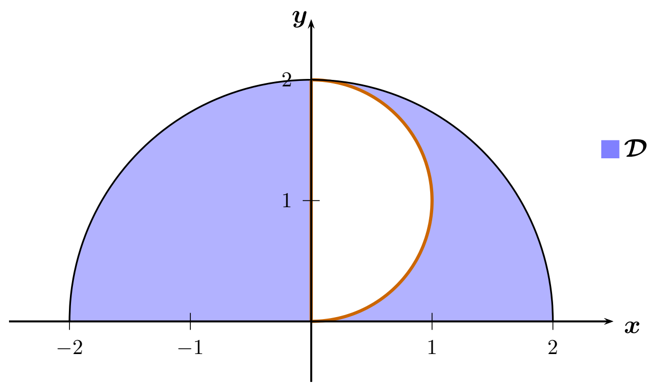
$$= ab\Big[\pi\frac{r^2}{2}\Big]_0^1 = \boxed{ab\pi}$$

Remarque : lorsque $a = b$, on retrouve l'aire du disque de rayon a défini par $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 \leqslant a^2\}$.

$$\mathcal{A}ire(D) = \pi \times a^2$$

Exercice. Calculer $I = \iint_D (x^2+y^2)dxdy$ où $\quad D = D_1 \backslash D_2 \quad$ avec $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2+y^2 \leqslant 4 \text{ et } y \geqslant 0\}$ et $\quad D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2+(y-1)^2 < 1 \text{ et } x > 0\}$.

Correction. Le domaine D est le suivant



La relation de Chasles nous dit que

$$I = \iint_{D_1} (x^2+y^2)dxdy - \iint_{D_2} (x^2+y^2)dxdy$$

On doit effectuer deux changements de variable différents pour chacun des domaines D_1 et D_2.

Changement de variable pour D_1 **:**

- On pose $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} 2r\cos\theta \\ 2r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad$ avec $r \in [0,1]$ et $\theta \in [0,\pi]$.
- On compose f avec Φ :

$$\begin{aligned} f(x,y) = x^2+y^2 \quad \Rightarrow f \circ \Phi(r,\theta) = f(2r\cos\theta, 2r\sin\theta) &= 4r^2\cos^2\theta + 4r^2\sin^2\theta \\ &= 4r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = 4r^2 \end{aligned}$$

- On utilise le résultat précédent pour obtenir le jacobien : $J_\phi(r,\theta) = abr = 2 \times 2 \times r = 4r$

On transforme l'intégrale double en (x,y) en une intégrale double en (r,θ)

$$\iint_{D_1} (x^2+y^2)\,dxdy = \iint_{[0,1]\times[0,\pi]} 4r^2 \times 4r\,drd\theta = \left(\int_0^1 16r^3\,dr\right) \times \left(\int_0^\pi 1d\theta\right) = \left[4r^4\right]_0^1 \times \pi = \boxed{4\pi}$$

Changement de variable pour D_2 **:**

- On pose $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ 1+r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad$ avec $r \in [0,1]$ et $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- On compose f avec Φ :

$$\begin{aligned} f(x,y) = x^2+y^2 \quad \Rightarrow f \circ \Phi(r,\theta) = f(r\cos\theta, 1+r\sin\theta) =& (r\cos\theta)^2 + (1+r\sin\theta)^2 \\ =& r^2\cos^2\theta + 1 + 2r\sin\theta + r^2\sin^2\theta \\ =& 1 + r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta) + 2r\sin\theta + = 1 + r^2 + 2r\sin\theta \end{aligned}$$

- On utilise le résultat précédent pour obtenir le jacobien : $J_\phi(r,\theta) = abr = 1 \times 1 \times r = r$

On transforme l'intégrale double en (x, y) en une intégrale double en (r, θ)

$$\iint_{D_2} (x^2 + y^2)\, dxdy = \iint_{[0,1]\times[0,\pi]} (1 + r^2 + 2r\sin\theta) \times r\, drd\theta = \int_0^1 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r + r^3 + 2r^2 \sin\theta) d\theta \right) dr$$

$$= \int_0^2 \left[(r + r^3)\theta - 2r^2 \cos\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dr$$

$$= \int_0^1 \pi(r + r^3)\, dr$$

$$= \left[\pi(\tfrac{r^2}{2} + \tfrac{r^4}{4}) \right]_0^1 = \pi(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}) = \boxed{\tfrac{3}{4}\pi}$$

Résultat final : $I = 4\pi - \frac{3}{4}\pi$.