Cours MT22 - Chapitre 5

Exemple : Calculer $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdydz$ avec $\Omega = [0,1]^3$ et $f(x,y,z) = x+y+z$.

Correction.

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{[0,1]^3} (x+y+z)\,dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y+z)dz \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left[(x+y)z + \tfrac{z^2}{2} \right]_0^1 dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left((x+y) + \tfrac{1}{2} \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left[(x+\tfrac{1}{2})y + \tfrac{y^2}{2} \right]_0^1 dx \\
&= \int_0^1 \left((x+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2} \right) dx \\
&= \int_0^1 (x+1)\,dx = \left[\tfrac{x^2}{2} + x \right]_0^1 = \tfrac{1}{2} + 1 = \tfrac{3}{2}.
\end{aligned}$$

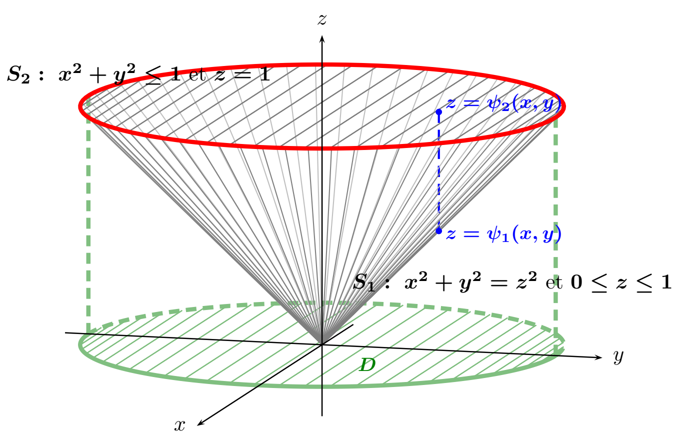
Exercice : Calculer, à l'aide de la méthode des bâtons, $\iiint_{\Omega} x^2 + y^2 \, dxdydz$ avec

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1\}.$$

Correction. Pour visualiser le solide Ω, nous devons identifier le bord de Ω.
On obtient le bord de Ω en transformant une « inégalité » en une « égalité » sans changer le reste dans la défintion de Ω. On en déduit alors que le bord de Ω est constitué de deux surfaces :

$$S_1 : \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = z \\ z \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ 0 \leqslant z \leqslant 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad S_2 : \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

On en déduit que S_1 est une portion de cône d'axe (Oz) comprise entre $z = 0$ et $z = 1$ et
la surface S_2 est le disque unité positionné sur le plan $z = 1$.
Le solide Ω est donc le domaine situé entre ces deux surfaces et on obtient la figure ci-dessous.



Pour appliquer la méthode des bâtons parrallèles à (Oz) nous devons déterminer la projection D de Ω sur le plan $z = 0$, puis les extermités ψ_1 et ψ_2 du bâtons en tout point $(x, y) \in D$.

- Le domaine D : par le calcul, on cherche le domaine de définition des couples (x, y) :
  de l'énoncé, on peut déduire uniquement ceci

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 1 \Rightarrow \quad x^2 + y^2 \leqslant 1$$

  La projection D est donc le disque unité dans le plan $z = 0$.
- Le bâton $[\psi_1(x, y), \psi_2(x, y)]$: on peut lire graphiquement que

$$\psi_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \psi_2(x, y) = 1$$

On obtient alors

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dxdydz = \iint_{D} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} (x^2 + y^2) \, dz \right) dxdy = \iint_{D} \Big[(x^2 + y^2)z\Big]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dxdy$$
$$= \iint_{D} (x^2 + y^2)(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) \, dxdy.$$

Il reste alors une intégrale double à calculer et pour ce faire on utilise les outils du chapitre 4.

Puisque la forme de D est un disque, le plus pratique est d'utiliser un changement de variable en coordonnées polaires.

- On pose $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$, avec $r \in [0,1]$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.
- On compose f avec Φ :

$$f(x,y) = (x^2+y^2)(1-\sqrt{x^2+y^2}) \quad \Rightarrow f\circ\Phi(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2(1-r)$$

- Le jacobien est : $J_\phi(r,\theta) = abr = 1 \times 1 \times r = r$

On transforme l'intégrale double en (x,y) en une intégrale double en (r,θ)

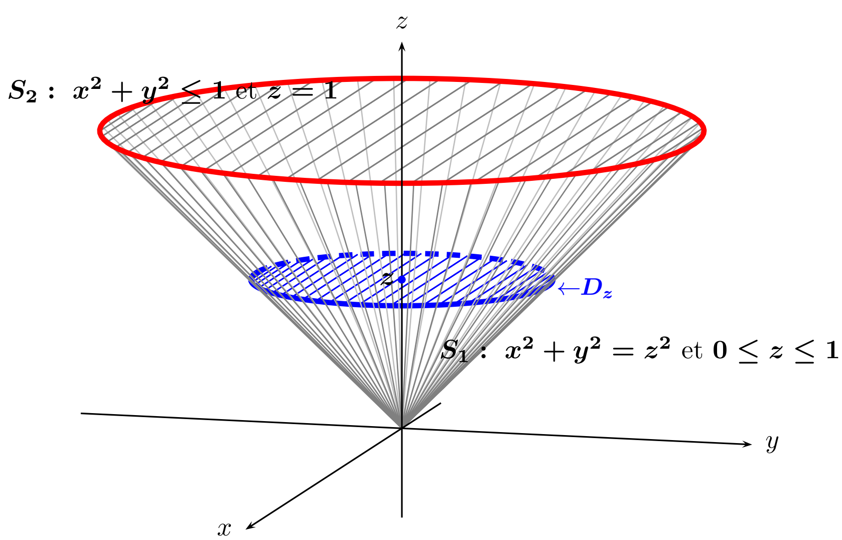
$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y^2)(1-\sqrt{x^2+y^2})\,dxdy &= \iint_{[0,1]\times[0,2\pi[} r^2(1-r)\times r\,drd\theta \\ &= \left(\int_0^1 (r^3-r^4)\,dr\right)\times\left(\int_0^{2\pi} 1 d\theta\right) \\ &= \left[\frac{r^4}{4}-\frac{r^5}{5}\right]_0^1 \times 2\pi = (\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5})\times 2\pi = \boxed{\tfrac{\pi}{10}}.\end{aligned}$$

Exercice : Calculer, à l'aide de la méthode des tranches, $\displaystyle\iiint_\Omega x^2 + y^2\, dxdydz$ avec

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1\}.$$

Correction. On considère ici la méthode des tranches perpendiculairement à l'axe de Ω qui est (Oz).
• À partir des inéquations définissant le domaine Ω, on en déduit l'encadrement $0 \leqslant z \leqslant 1$.
• On cherche ensuite une définition de chaque coupe (ou tranche) D_z de Ω contenue dans les plans parrallèles à (xOy) passant par $(0, 0, z)$ avec $z \in [0, 1]$ fixé. On omet la variable z dans les coordonnées des points de D_z. La définition de D_z se retrouve dans les inéquations de Ω : il s'agit d'un disque de rayon z,

$$D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leqslant z^2\}.$$



On obtient alors

$$\iiint_\Omega (x^2 + y^2) dxdydz = \int_0^1 \left(\iint_{D_z} (x^2 + y^2)\, dxdy \right) dz.$$

Il reste alors une intégrale double à calculer et pour ce faire on utilise les outils du chapitre 4.

Puisque la forme de D_z est un disque, le plus pratique est d'utiliser un changement de variable en coordonnées polaires :

$$D_z := \left\{(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta);\ (r, \theta) \in [0, z] \times [0, 2\pi[\right\}.$$

On n'oublie pas le jacobien du changement de variable qui est ici $J = abr = r$ car on a utilisé $a = b = 1$ dans l'écriture des couples (x, y). Finalement,

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega (x^2 + y^2) dxdydz &= \int_0^1 \left(\iint_{[0,z]\times[0,2\pi[} r^2 \times r\, drd\theta \right) dz \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^z \left[r^3\theta \right]_0^{2\pi} dr \right) dz \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^z 2\pi r^3 dr \right) dz = \int_0^1 \left[\frac{\pi r^4}{2} \right]_0^z dz = \int_0^1 \frac{\pi z^4}{2} dz = \left[\frac{\pi z^5}{2 \times 5} \right]_0^1 = \frac{\pi}{10}
\end{aligned}$$