Cours MT22 - Chapitre 3

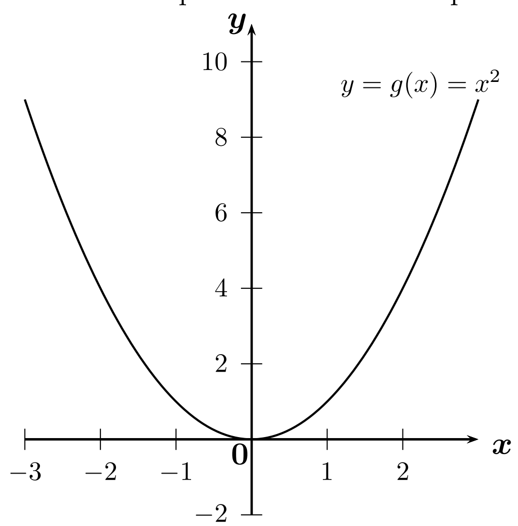
II - Équations paramétriques

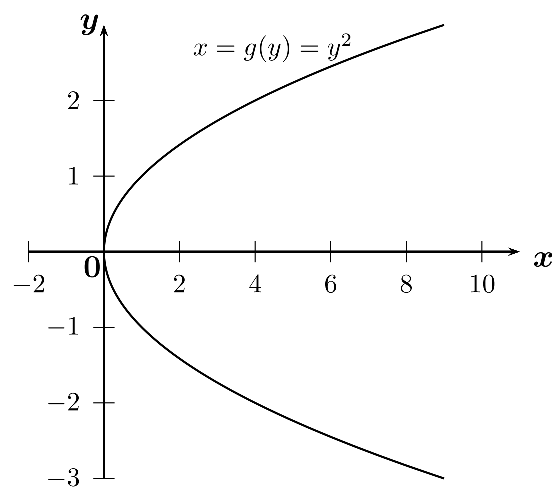
$\boxed{A}$ Les courbes du plan et de l'espace

Exemple 1 : *Les courbes représentatives de fonctions* $\mathscr{C}_g = \{M(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\; y = g(x) \text{ et } x \in I\}$.
La paramétrisation de $\mathscr{C}$ est :

$$M(x,y) \in \mathscr{C}_g \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, t \in I,\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

D'autres courbes peuvent être définies par l'équation explicite $x = g(y)$ comme ci-dessous à droite :





La paramétrisation de $\mathscr{C}$ devient :

$$M(x,y) \in \mathscr{C}_g \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, t \in I,\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

Exemple 2 : *Les cercles du plan* $\mathscr{C} = \{M(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\; (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2\}$, avec $R > 0$ donné.

Ici, on utilisera toujours le système de coordonnées polaires pour paramétrer une courbe. Si on parcourt la cercle entier, la paramétrisation est :

$$M(x,y) \in \mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \theta \in [0, 2\pi[,\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + R\cos\theta \\ b + R\sin\theta \end{pmatrix},$$

où les coordonnées du centre (a,b) et le rayon sont des réels fixés.

$\boxed{B}$ Les surfaces de l'espace $(Oxyz)$

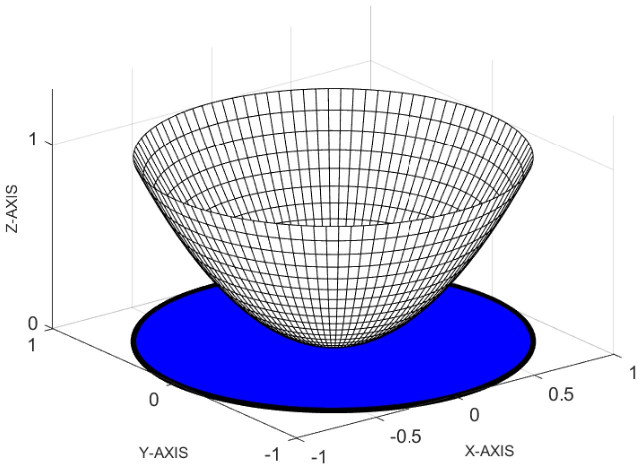
Exemple 1 : *Les graphes de fonctions de 2 variables* $\mathcal{S}=\{M(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,;z=g(x,y) \text{ et } (x,y)\in D\}$.

La paramétrisation de $\mathcal{S}$ est :

$$M(x,y,z)\in\mathcal{S} \quad\Leftrightarrow\quad \exists\,(u,v)\in D,\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\v\\g(u,v)\end{pmatrix}.$$

Le choix du domaine de définition D délimite la surface $\mathcal{S}$. Sa détermination est très importante. La paramétrisation de $\mathcal{S}$ peut utiliser une paramétrisation de D

D = disque de rayon 1 et $z=g(x,y)=x^2+y^2$



Les paramètres (u,v) doivent parcourir le disque unité, donc on pose $u=r\cos\theta$ et $v=r\sin\theta$ pour obtenir :

$$M(x,y,z)\in\mathcal{S} \ \Leftrightarrow\ \exists\,(r,\theta)\in[0,1]\times[0,2\pi[,\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u=r\cos\theta\\v=r\sin\theta\\u^2+v^2=r^2\end{pmatrix}$$

Exemple 2 : *Les cylindres de révolution* $\mathcal{S}=\{M(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,;\ x^2+y^2=R^2\}$, avec $R>0$ donné.

On utilise le système de coorodonnées cylindriques (ρ,φ,z) dans lequel le rayon des coordonnées polaires de (x,y) est fixé $\rho=R$:

$$M(x,y,z)\in\mathcal{S} \quad\Leftrightarrow\quad \exists\,(\varphi,z)\in[0,2\pi[\times\mathbb{R},\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R\cos\varphi\\R\sin\varphi\\z\end{pmatrix}.$$

Exemple 3 : *Les sphères* $\mathcal{S}=\{M(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,;\ x^2+y^2+z^2=R^2\}$, avec $R>0$ donné.

On utilise le système de coorodonnées sphériques (r,φ,θ) dans lequel la distance à l'origine $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ est fixée $r=R$:

$$M(x,y,z)\in\mathcal{S} \quad\Leftrightarrow\quad \exists\,(\varphi,\theta)\in[0,2\pi[\times[0,\pi],\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R\cos\varphi\sin\theta\\R\sin\varphi\sin\theta\\R\cos\theta\end{pmatrix}.$$

Exercice : Soit P un plan passant par $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et engendré par 2 vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ non colinéaires. Déterminer les équations paramétriques de P.

Correction. La position de tout point $M(x, y, z)$ dans ce plan se caractérise par le fait que les trois vecteurs

$$\boxed{\overrightarrow{AM},\ \vec{a} \text{ et } \vec{b} \text{ sont coplanaires.}}$$

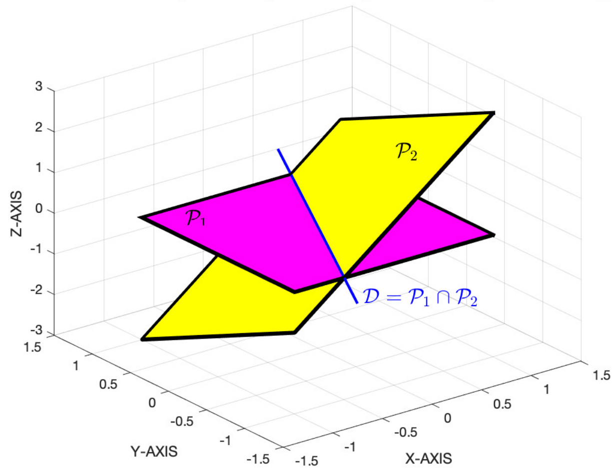
$$M \in \mathscr{P} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (u, v) \in \mathbb{R}^2\ ,\ \ \overrightarrow{AM} = u\vec{a} + v\vec{b}.$$

Les équations paramétriques sont

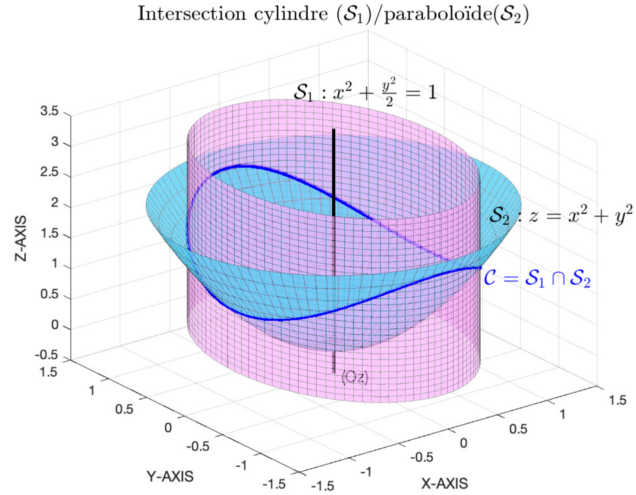
$$\boxed{M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(u, v) = \begin{pmatrix} x_A + ua_1 + vb_1 \\ y_A + ua_2 + vb_2 \\ z_A + ua_3 + vb_3 \end{pmatrix} \qquad \text{et } (u, v) \in \mathbb{R}^2.}$$

Quelques courbes 3D définies par l'intersection de deux surfaces.

Intersection des plans d'équations $\mathcal{P}_1 : z = 0$ et $\mathcal{P}_2 : z = 2x - y$

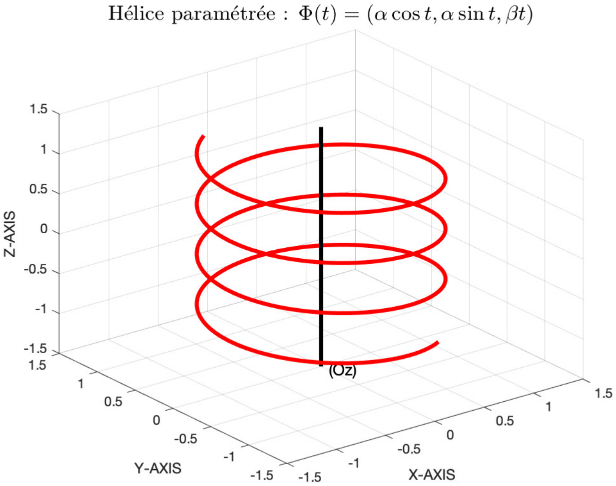


Intersection cylindre $(\mathcal{S}_1)$/paraboloïde$(\mathcal{S}_2)$

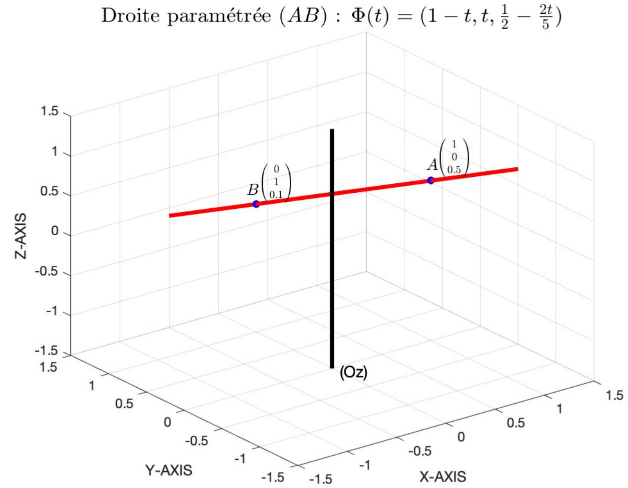


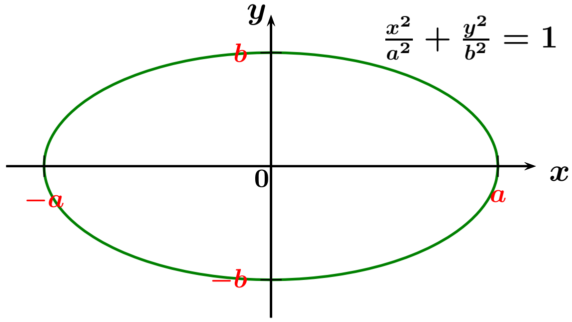
Quelques courbes 3D paramétrées.

Hélice paramétrée : $\Phi(t) = (\alpha \cos t, \alpha \sin t, \beta t)$



Droite paramétrée (AB) : $\Phi(t) = (1 - t, t, \frac{1}{2} - \frac{2t}{5})$

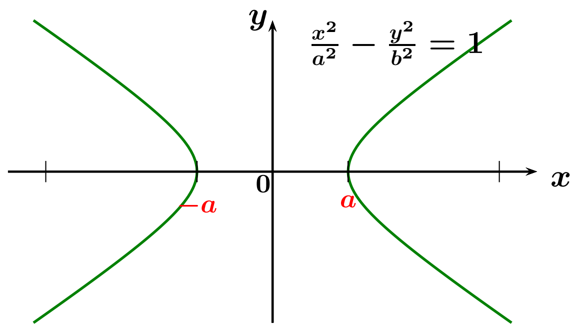




l'ellipse :

Une paramétrisation est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(\theta) = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix},\ \theta \in [0, 2\pi[$$



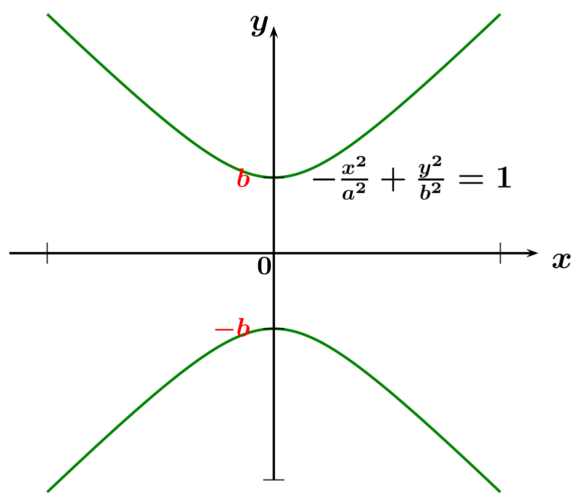
L'hyperbole d'axe (Oy) :

Une paramétrisation est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(t) = \begin{pmatrix} \pm a\sqrt{t^2+1} \\ b\,t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

ou

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(t) = \begin{pmatrix} \pm a\,\mathrm{ch}\,t \\ b\,\mathrm{sh}\,t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$



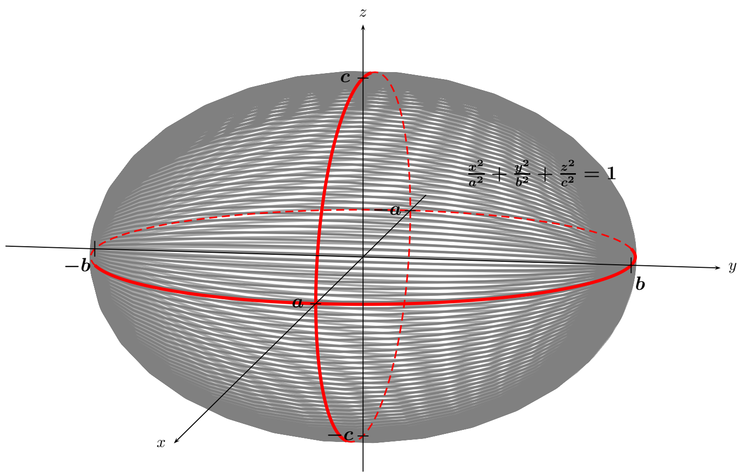
L'hyperbole d'axe (Ox) :

Une paramétrisation est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(t) = \begin{pmatrix} a\,t \\ \pm b\sqrt{t^2+1} \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

ou

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(t) = \begin{pmatrix} a\,\mathrm{sh}\,t \\ \pm b\,\mathrm{ch}\,t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

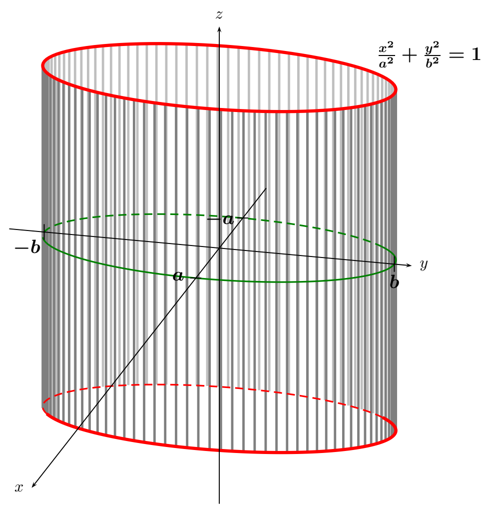


L'ellipsoide :

Une paramétrisation est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} a\cos\phi\,\sin\theta \\ b\sin\phi\sin\theta \\ c\cos\theta \end{pmatrix},$$

$\phi \in [0,2\pi[$ et $\theta \in [0,\pi]$

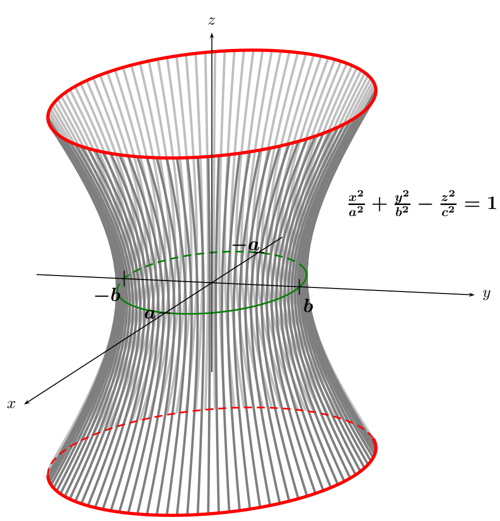


Le cylindre elliptique d'axe (Oz) :

Une paramétrisation est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\phi,z) = \begin{pmatrix} a\cos\phi \\ b\sin\phi \\ z \end{pmatrix},$$

$\phi \in [0,2\pi[$ et $z \in \mathbb{R}$



L'hyperboloïde elliptique à 1 nappe d'axe (Oz) :

Une paramétrisation est

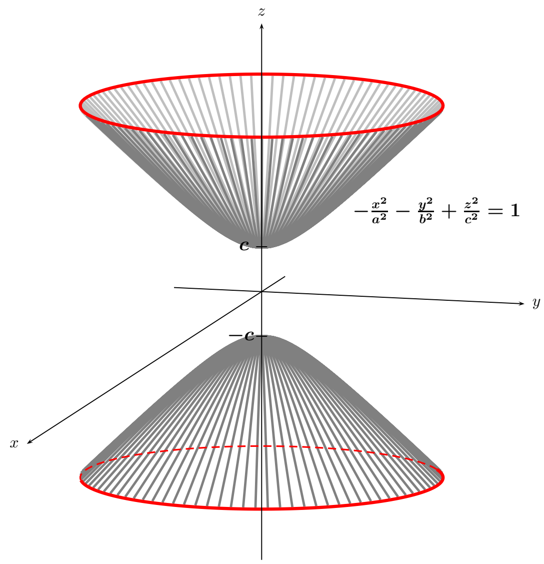
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\phi,z) = \begin{pmatrix} a\cos\phi\sqrt{\frac{z^2}{c^2}+1} \\ b\sin\phi\sqrt{\frac{z^2}{c^2}+1} \\ z \end{pmatrix}$$

$\phi \in [0,2\pi[$ et $z \in \mathbb{R}$

ou

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\rho,\phi) = \begin{pmatrix} a\,\rho\,\cos\phi \\ b\,\rho\,\sin\phi \\ \pm c\sqrt{\rho^2-1} \end{pmatrix},$$

$\phi \in [0,2\pi[$ et $\rho \in [1,+\infty[$



L'hyperboloïde elliptique à 2 nappes d'axe (Oz) :

Une paramétrisation est

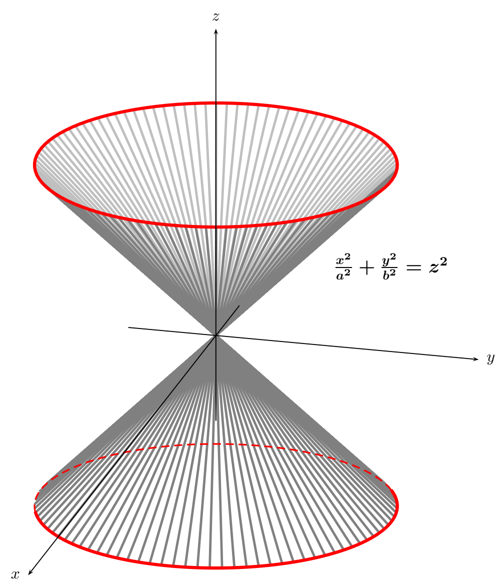
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\phi, z) = \begin{pmatrix} a\cos\phi\sqrt{\frac{z^2}{c^2}-1} \\ b\sin\phi\sqrt{\frac{z^2}{c^2}-1} \\ z \end{pmatrix}$$

$\phi \in [0, 2\pi[$ et $z \in]-\infty, -c] \cup [c, +\infty[$

ou

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\rho, \phi) = \begin{pmatrix} a\,\rho\,\cos\phi \\ b\,\rho\,\sin\phi \\ \pm c\sqrt{\rho^2+1} \end{pmatrix},$$

$\phi \in [0, 2\pi[$ et $\rho \in [0, +\infty[$



Le cône elliptique d'axe (Oz) :

Une paramétrisation est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\phi, z) = \begin{pmatrix} a\,|z|\,\cos\phi \\ b\,|z|\,\sin\phi \\ z \end{pmatrix},$$

$\phi \in [0, 2\pi[$ et $z \in \mathbb{R}$

ou

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\rho, \phi) = \begin{pmatrix} a\,\rho\,\cos\phi \\ b\,\rho\,\sin\phi \\ \pm\rho \end{pmatrix},$$

$\phi \in [0, 2\pi[$ et $\rho \in [0, +\infty[$