Cours MT22 - Chapitre 3

preuve (équation paramétrique de la tangente) :

• On utilise la C.N.S de dérivabilité : $\Phi(t_0+h)=\Phi(t_0)+h\Phi'(t_0)+|h|\varepsilon(h)$, $\varepsilon(h)\underset{h\to 0}{\to} 0$.

Pour $h\neq 0$, soit $M=\Phi(t_0+h)\in\mathscr{C}$. Alors $\overrightarrow{M_0M}=\Phi(t_0+h)-\Phi(t_0)=h\Phi'(t_0)+|h|\varepsilon(h)$ (#).

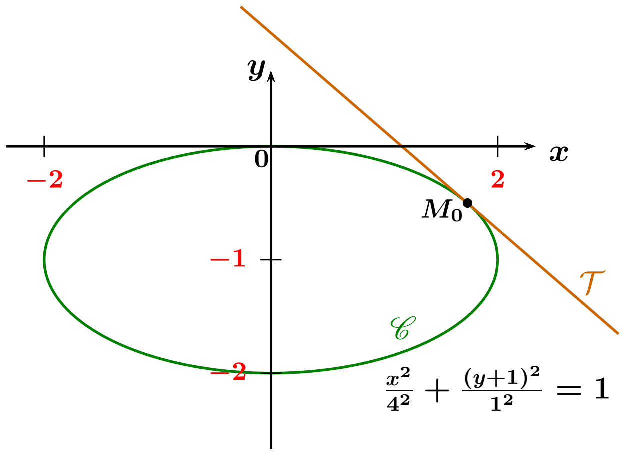
• Tout multiple de $\overrightarrow{M_0M}$ est vecteur directeur de la sécante (M_0M) : considérons $\frac{\overrightarrow{M_0M}}{h}\neq\vec{0}$.

Or d'après (#), on a $\frac{\overrightarrow{M_0M}}{h}\underset{h\to 0}{\to}\Phi'(t_0)$. Donc les sécantes (M_0M) tendent vers une droite portée par le vecteur $\vec{v}_0=\Phi'(t_0)$. Par unicité de la position limite des sécantes, la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente $\mathcal{T}$ en M_0.

• De plus, $M\in\mathcal{T} \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{M_0M}//\vec{v}_0 \quad\Leftrightarrow\quad \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \overrightarrow{M_0M}=\lambda\vec{v}_0 \quad\Leftrightarrow\quad \exists\lambda\in\mathbb{R},\ M=M_0+\lambda\vec{v}_0.$

Exercice : Considérons l'ellipse $\mathscr{C}$ d'équation implicite $\frac{x^2}{4} + (y+1)^2 = 1$.
Paramétrer la courbe $\mathscr{C}$. En déduire les équations paramétriques de sa droite tangente en $M_0(\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$.

Correction. Il s'agit d'une ellipse de centre en $(0,-1)$ et de rayons 2 sur (Ox) et 1 sur (Oy).



Une paramétrisation est

$$M \in \mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \theta \in [0, 2\pi[,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(\theta) = \begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ -1 + \sin\theta \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer les équations paramétriques de la tangente on doit déterminer θ_0 tel que $M_0 = \Phi(\theta_0)$. Cela revient à résoudre le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\cos\theta_0 & = & \sqrt{3} \\ -1 + \sin\theta_0 & = & -\frac{1}{2} \end{array} \right. \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[\quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \cos\theta_0 & = & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_0 & = & \frac{1}{2} \end{array} \right. \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[\quad \Leftrightarrow \quad \theta_0 = \frac{\pi}{6}.$$

On obtient un vecteur directeur de la tangente par la formule

$$\vec{v}_0 = \Phi'(\theta_0) = \begin{pmatrix} -2\sin\theta_0 \\ \cos\theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Les équations paramétriques sont

$$\boxed{M \in \mathcal{T} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ M = M_0 + \lambda \vec{v}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} - \lambda \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda \end{pmatrix}}$$

Pour aller un peu plus loin, une simple substitution $\lambda = \sqrt{3} - x$ vous donne l'équation cartésienne de la droite

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} - x) \quad \Leftrightarrow \boxed{\sqrt{3}x + 2y = 2}.$$

preuve (équations paramétriques du plan tangent) :

• Soient $\alpha : t \mapsto \alpha(t)$ et $\beta : t \mapsto \beta(t)$ deux fonctions définies sur un intervalle I, dérivables en $t_0 \in I$ et telles que $(\alpha(t_0), \beta(t_0)) = (u_0, v_0)$.

• Par composition, l'application

$$\gamma : t \in I \mapsto \gamma(t) = \Phi(\alpha(t), \beta(t)) \in S$$

est dérivable en t_0 et définit une courbe paramétrée $\mathscr{C}$ incluse dans S et passant par $M_0 = \Phi(u_0, v_0) = \Phi(\alpha(t_0), \beta(t_0))$.

• D'après le paragraphe précédent $\boxed{A}$, la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente en M_0 de vecteur directeur

$$\vec{v}_0 = \gamma'(t_0) = \alpha'(t_0)\frac{\partial \Phi}{\partial u}(\alpha(t_0), \beta(t_0)) + \beta'(t_0)\frac{\partial \Phi}{\partial v}(\alpha(t_0), \beta(t_0)) = \alpha'(t_0)\vec{t_u} + \beta'(t_0)\vec{t_v}.$$

Les tangentes sont coplanaires et incluses dans le plan $\mathcal{P}$ passant par M_0 et parallèle aux vecteurs tangents $\vec{t_u}$ et $\vec{t_v}$.

• De plus,

$$M \in \mathcal{P} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{t_u} + \mu\vec{t_v} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \underbrace{M = M_0 + \lambda\vec{t_u} + \mu\vec{t_v}}_{\text{équations paramétriques}}.$$

Exercice : Soit S le cône définit par $(x-1)^2+y^2=2z^2$.
Donner une paramétrisation de S et déterminer le plan tangent à S au point $M_0(0,1,1)$.

Correction. On peut réécrire l'équation implicite de S sous la forme

$$\frac{(x-1)^2}{(\sqrt{2}|z|)^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{2}|z|)^2}=1.$$

En utilisant le système de coordonnées cylindriques, nous pouvons écrire

$$M\in S \quad \leftrightarrow \quad \exists(\phi,z)\in[0,2\pi[\times\mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\Phi(\phi,z)=\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}|z|\cos\phi\\ \sqrt{2}|z|\sin\phi\\ z\end{pmatrix}.$$

Déterminons les paramètres (ϕ_0,z_0) tels que $M_0=\Phi(\phi_0,z_0)$. Il s'agit de résoudre

$$\begin{cases} 1+\sqrt{2}|z|\cos\phi=0\\ \sqrt{2}|z|\sin\phi=1\\ z=1\end{cases} \quad \Rightarrow \quad (\phi,z)=(\tfrac{3\pi}{4},1).$$

• Le plan tangent à S en M_0 est le plan $\mathcal{P}$ passant par M_0 et parallèle aux vecteurs $\vec{t_\phi}=\dfrac{\partial\Phi}{\partial\phi}(\frac{3\pi}{4},1)$ et $\vec{t_z}=\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}(\frac{3\pi}{4},1)$. On a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}(\phi,z)=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}|z|\sin\phi\\ \sqrt{2}|z|\cos\phi\\ 0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{t_\phi}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

et

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}(\phi,z)=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\frac{z}{|z|}\cos\phi\\ \sqrt{2}\frac{z}{|z|}\sin\phi\\ 1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{t_z}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

• Nous pouvons en déduire une équation implicite en calculant un vecteur normal à ce plan tangent :

$$\boxed{\vec{N}=\vec{t_u}\wedge\vec{t_v}}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M\in\mathcal{P} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{N}=0\\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}x\\y-1\\z-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}=0\\ &\Leftrightarrow \quad -x+(y-1)-2(z-1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x-y+2z=1}. \end{aligned}$$

preuve (équations implicite de la tangenta à une courbe du plan) :

• On suppose que la courbe $\mathscr{C}$ est également paramétrable par une application Φ dérivable :

$$M(x,y) \in \mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in I,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix}.$$

• Dans ce cas, $\forall\, t \in I,\ f(\phi_1(t), \phi_2(t)) = 0$. Par dérivation, on obtient pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} & \forall\, t \in I, \quad \phi_1'(t)\tfrac{\partial f}{\partial x}(\phi_1(t), \phi_2(t)) + \phi_2'(t)\tfrac{\partial f}{\partial y}(\phi_1(t), \phi_2(t)) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \forall\, t \in I, \quad \begin{pmatrix} \phi_1'(t) \\ \phi_2'(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\phi_1(t), \phi_2(t)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\phi_1(t), \phi_2(t)) \end{pmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \forall\, t \in I, \quad \Phi'(t) \cdot \nabla f(x,y) = 0. \end{aligned}$$

Le vecteur tangent $\vec{v} = \Phi'(t)$ est donc normal (orthogonal) au vecteur gradient $\nabla f(M)$.

• L'éq. de la tangente $\mathcal{T}$ en $M_0 \in \mathscr{C}$ s'en déduit de la géométrie. Soit $\vec{N}_0 = \nabla f(M_0)$, alors on traduit le fait que $\vec{N}_0$ est perpendiculaire à la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}$ en M_0 :

$$M \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{N}_0 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N}_0 = 0.$$

Exercice : Considérons l'ellipse $\mathscr{C}$ d'équation implicite $\frac{x^2}{4} + (y+1)^2 = 1$.
Déterminer une équation de la droite tangente en $M_0(\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$.

Correction. Une équation implicite défissant $\mathscr{C}$ est $f(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + (y+1)^2 - 1 = 0$.
Un vecteur normal à la tangente est $\vec{N} = \nabla f(\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$. On a

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ 2(y+1) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Une équation implicite de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}$ en M_0 est

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{T} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x - \sqrt{3} \\ y + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \sqrt{3}) + (y + \frac{1}{2}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}x + y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\sqrt{3}x + 2y = 2}. \end{aligned}$$

Nous retrouvons la même équation qu'à la page 1 obtenue avec une paramétrisation de $\mathscr{C}$.

Exercice : Soit S le paraboloïde d'équation $z+1=\frac{x^2}{2}+y^2$.
Déterminer l'équation implicite du plan tangent à S en tout point $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Correction. Une équation implicite défissant S est $f(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+y^2-(z+1)=0$.

Un vecteur normal au plan tangent $\mathcal{P}$ en M_0 est $\vec{N}=\nabla f(M_0)=\begin{pmatrix} x_0 \\ 2y_0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Une équation implicite du plan tangent $\mathcal{P}$ à S en M_0 est

$$\begin{aligned} M\in\mathcal{P} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{N}=0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_0 \\ 2y_0 \\ -1 \end{pmatrix}=0 \\ &\Leftrightarrow \quad x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-(z-z_0)=0 \\ &\Leftrightarrow \quad x_0x+2y_0y-z=\underbrace{x_0^2+2y_0^2}_{=2(z_0+1)}-z_0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x_0x+2y_0y-z=z_0-2} \end{aligned}$$