Cours MT22 - Chapitre 4

Exemple 1 : Calculer $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ avec $D=[0,1]\times[0,2]$ et $f(x,y)=x^2+y^2$.

Correction.

$$\iint_{[0,1]\times[0,2]} (x^2+y^2)\,dxdy = \int_0^1\left(\int_0^2 (x^2+y^2)dy\right)dx = \int_0^1 \left[x^2y+\tfrac{y^3}{3}\right]_0^2 dx = \int_0^1 (2x^2+\tfrac{8}{3})dx = \left[\tfrac{2x^3}{3}+\tfrac{8x}{3}\right]_0^1 = \tfrac{2}{3}+\tfrac{8}{3} = \tfrac{10}{3}$$

$$\iint_{[0,1]\times[0,2]} (x^2+y^2)\,dxdy = \int_0^2\left(\int_0^1 (x^2+y^2)dx\right)dy = \int_0^2 \left[\tfrac{x^3}{3}+y^2x\right]_0^1 dy = \int_0^2 (\tfrac{1}{3}+\tfrac{y^2}{3})dy = \left[\tfrac{y}{3}+\tfrac{y^3}{3}\right]_0^1 = \tfrac{2}{3}+\tfrac{8}{3} = \tfrac{10}{3}$$

Exemple 2 : Calculer $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ avec $D=[a,b]\times[c,d]$ et $f(x,y)=g(x)k(y)$ où g et k sont deux applications définies et continues sur $[a,b]$ et $[c,d]$ respectivement.

Correction.

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} g(x)k(y)\,dxdy = \int_a^b\left(\int_c^d g(x)k(y)dy\right)dx = \int_a^b g(x)\underbrace{\left(\int_c^d k(y)dy\right)}_{\in\mathbb{R}}dx = \underbrace{\left(\int_c^d k(y)dy\right)}_{\in\mathbb{R}}\times\left(\int_a^b g(x)\,dx\right).$$

Exemple : Soit D une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$ et $f : (x,y) \in D \mapsto 1$. Montrons que $\boxed{\iint_D 1\, dxdy = \mathcal{A}(D)}$

Correction. Le domaine D étant borné on a $D \subset [a,b] \times [c,d]$. On définit la fonction $\tilde{f}$ par

$$\forall (x,y) \in [a,b] \times [c,d], \quad \tilde{f}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in D \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin D. \end{cases}$$

• On étudie $S_N^- = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N u_{ij} \times \frac{(b-a)(d-c)}{N^2}$ où $u_{ij} = \inf\left\{\tilde{f}(x,y) \ ; \ (x,y) \in R_{ij}\right\}$. On a

$$\forall (i,j) \in [\![1,N]\!]^2, \ u_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in I_N^- \\ 0 & \text{si } (i,j) \notin I_N^- \end{cases}$$

Ainsi

$$S_N^- = \sum_{(i,j)\in I_N^-} 1 \times \frac{(b-a)(d-c)}{N^2} = \mathcal{A}ire(D_N^-).$$

• On étudie $S_N^+ = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N U_{ij} \times \frac{(b-a)(d-c)}{N^2}$ où $U_{ij} = \sup\left\{\tilde{f}(x,y) \ ; \ (x,y) \in R_{ij}\right\}$. On a

$$\forall (i,j) \in [\![1,N]\!]^2, \ U_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in I_N^+ \\ 0 & \text{si } (i,j) \notin I_N^+ \end{cases}$$

Ainsi

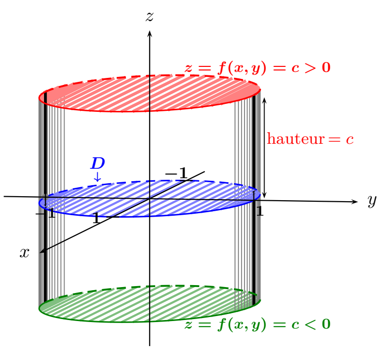
$$S_N^+ = \sum_{(i,j)\in I_N^+} 1 \times \frac{(b-a)(d-c)}{N^2} = \mathcal{A}ire(D_N^+).$$

• Comme D est quarrable, on a

$$\lim_{N\to+\infty} S_N^- = \lim_{N\to+\infty} \mathcal{A}ire(D_N^-) = \mathcal{A}ire(D) = \lim_{N\to+\infty} \mathcal{A}ire(D_N^+) = \lim_{N\to+\infty} S_N^+.$$

Exemple : Soit D le disque unité et $f : (x,y) \in D \mapsto c$ avec $c \in \mathbb{R}$.
Montrer que f est intégrable sur D. Que représente le nombre $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$?

Correction. D est quarrable avec $\mathcal{A}ire(D) = \pi$. Soit $\displaystyle\bigcup_{(i,j)\in[\![1,N]\!]^2} R_{ij}$ un quadrillage contenant D.



• Supposons $c > 0$. Alors en reprenant l'exemple précédent, nous obtenons

$$S_N^- = \sum_{(i,j)\in I_N^-} c \times \mathcal{A}ire(R_{ij}) = c \times \mathcal{A}ire(D_N^-),$$

$$\text{et} \qquad S_N^+ = \sum_{(i,j)\in I_N^+} c \times \mathcal{A}ire(R_{ij}) = c \times \mathcal{A}ire(D_N^+).$$

On obtient $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N^- = c \times \mathcal{A}ire(D) = \lim_{N\to+\infty} S_N^+$. D'où

$$\iint_D c\,dxdy = c \times \mathcal{A}ire(D)\ .$$

L'intégrale double correspond à la formule donnant le volume du cylindre délimité par D et le graphe de f (le disque rouge).

• Pour $c < 0$, on obtient

$$S_N^- = \sum_{(i,j)\in I_N^+} c \times \mathcal{A}ire(R_{ij}) = c \times \mathcal{A}ire(D_N^+),$$

$$\text{et} \qquad S_N^+ = \sum_{(i,j)\in I_N^-} c \times \mathcal{A}ire(R_{ij}) = c \times \mathcal{A}ire(D_N^-).$$

On obtient $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N^- = c \times \mathcal{A}ire(D) = \lim_{N\to+\infty} S_N^+$. D'où

$$\iint_D c\,dxdy = c \times \mathcal{A}ire(D) = -|c| \times \mathcal{A}ire(D)\ .$$

L'intégrale double correspond à l'opposé du volume du cylindre délimité par D et le graphe de f (le disque vert).