

Exercice A.2.2 du poly. Recherche du domaine de définition d'une fonction

1. $f(x, y) = \ln((9 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1))$

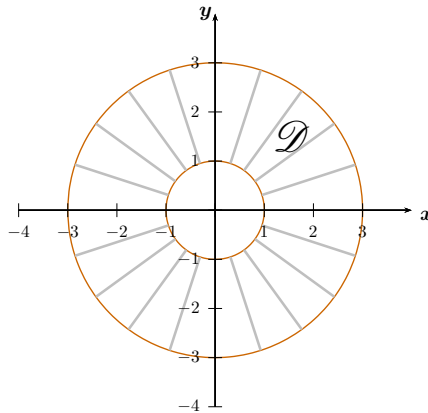
Le domaine de définition de f est caractérisé par l'inéquation

$$(9 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - x^2 - y^2 > 0 \\ x^2 + y^2 - 1 > 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 9 - x^2 - y^2 < 0 \\ x^2 + y^2 - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{1 < x^2 + y^2 < 9} \quad \text{ou} \quad \underbrace{9 < x^2 + y^2 < 1}_{\text{impossible}}$$

$$D_f := \{M(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 < OM < 3\}.$$

Représentation graphique : Le domaine de définition de f est une couronne (ouverte) délimitée par les cercles centrés en l'origine et de rayons respectifs 1 et 3.



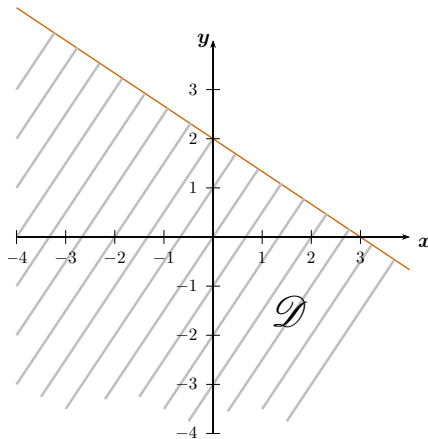
2. $f(x, y) = \sqrt{6 - (2x + 3y)}$

Le domaine de définition de f est caractérisé par l'inéquation

$$6 - (2x + 3y) \geq 0 \Leftrightarrow 6 \geq 2x + 3y \Leftrightarrow 6 - 2x \geq 3y \Leftrightarrow \boxed{2 - \frac{2}{3}x \geq y}.$$

$$D_f := \{M(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 2 - \frac{2}{3}x\}.$$

Représentation graphique : Le domaine de définition de f est le demi-plan (frontière incluse) situé sous la droite d'équation $y = 2 - \frac{2}{3}x$.



Exercice hors poly. A l'aide des quantificateurs, démontrer la proposition du cours suivante.

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$, $M(x_0, y_0) \in D$ et $f : (x, y) \in D \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ une application continue en M_0 .

Soit I un intervalle ouvert contenant 0 et $\Phi : t \in I \mapsto \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ une application continue en $t = 0$ telle que $\Phi(0) = (u(0), v(0)) = (x_0, y_0) = M_0$ et $\text{Im}\Phi \subset D$.

Montrer que $f \circ \Phi : t \in I \mapsto f(u(t), v(t)) \in \mathbb{R}$ est continue en $t = 0$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en $M_0(x_0, y_0)$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$\forall M \in D, M_0 M = ||\overrightarrow{M_0 M}|| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \eta_1 \Rightarrow |f(M) - f(M_0)| = |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Pour tout $t \in I$, notons M_t le point de coordonnées $\Phi(t)$. Comme Φ est continue en $t = 0$, pour $\varepsilon' = \eta_1 > 0$, il existe $\eta_2 > 0$ tel que

$$\forall t \in I, |t - 0| < \eta_2 \Rightarrow M_0 M_t = ||\Phi(t) - \Phi(0)|| < \varepsilon' = \eta_1.$$

Or, $\forall t \in I, M_t := \Phi(t) \in D$ et $\Phi(0) = M_0$. Donc nous avons l'enchaînement

$$\forall t \in I, |t - 0| < \eta_2 \Rightarrow M_0 M_t < \eta_1 \Rightarrow |f(M_t) - f(M_0)| = |f \circ \Phi(t) - f \circ \Phi(0)| < \varepsilon.$$

La fonction composée $f \circ \Phi$ est continue en 0.

Faire un schéma... M_t est un point mobile le long d'un chemin continu passant par M_0 dans le domaine de définition D de f .

Exercice A.2.6 du poly. Applications de la condition suffisante de continuité en coordonnées polaires et de la contraposée de l'exercice précédent.

cours : on admet que les fonctions usuelles *polynômes*, *cosinus*, *sinus*, *tangente*, *exponentielle*, *logarithme népérien*, *racine carrée*, *arcsin*, *arccos* et *arctan* sont continues sur leur domaine de définition. Et par *somme*, *produit*, *quotient* avec dénominateur non nul et *composition* des fonctions usuelles, la fonction obtenue est continue sur son domaine de définition.

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq 0$ et $f(0, 0) = 0$.

Continuité en $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$:

L'expression $\frac{x}{x^2+y^2}$ est une fraction de polynômes donc elle est continue en tout point (x_0, y_0) tel que le dénominateur $x_0^2 + y_0^2$ ne s'annule pas. Donc f est continue en tout point $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Continuité en $(x_0, y_0) = (0, 0)$:

• Calcul de $f(x, y)$ en coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, pour $r > 0$

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r \cos \theta}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}.$$

Comme $\frac{1}{r} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty$, on voit qu'on ne peut pas majorer $|f(r \cos \theta, r \sin \theta) - f(0, 0)|$ uniformément en $\theta \in \mathbb{R}$ par une expression $g(r)$ qui tend vers 0 lorsque $r \rightarrow 0$.

• On montre alors que f n'est pas continue en $(0, 0)$ sur un chemin particulier passant par ce point.

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow f \circ \Phi(t) = f(t, t) = \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \infty.$$

La limite n'existe pas, donc $f \circ \Phi$ n'est pas continue en $t = 0$. Comme Φ est continue en $t = 0$, on en déduit par contraposée que f n'est pas continue en $M_0 = \Phi(0) = (0, 0)$.

2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq 0$ et $f(0, 0) = 0$.

Continuité en $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$:

L'expression $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ est une fraction de polynômes donc elle est continue en tout point (x_0, y_0) tel que le dénominateur $x_0^2 + y_0^2$ ne s'annule pas. Donc f est continue en tout point $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Continuité en $(x_0, y_0) = (0, 0)$:

• Calcul de $f(x, y)$ en coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, pour $r > 0$

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^2 \cos^2 \theta}{r^2} = \cos^2 \theta.$$

Pour $\theta \neq \frac{\pi}{2} \text{ mod } (\pi)$, on a $|f(r \cos \theta, r \sin \theta) - f(0, 0)| = \cos^2 \theta$ qui prend des valeurs constantes non nulles pour tout $r \in]0, +\infty[$. De plus, les valeurs de la fonction f ne dépendent pas de la variable r donc on ne peut pas majorer $|f(r \cos \theta, r \sin \theta) - f(0, 0)|$ uniformément en $\theta \in \mathbb{R}$ par une expression $g(r)$ qui tend vers 0 lorsque $r \rightarrow 0$.

• On montre alors que f n'est pas continue en $(0, 0)$ sur un chemin particulier passant par ce point.

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow f \circ \Phi(t) = f(t, t) = \frac{t^2}{t^2+t^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \neq 0 = f \circ \Phi(0) = f(0, 0).$$

La limite existe mais est différente de $f \circ \Phi(0)$, donc $f \circ \Phi$ n'est pas continue en $t = 0$. Comme Φ est continue en $t = 0$, on en déduit par contraposée que f n'est pas continue en $M_0 = \Phi(0) = (0, 0)$.

3. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq 0$ et $f(0, 0) = 0$.

Continuité en $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$:

L'expression $\frac{x^3}{x^2+y^2}$ est une fraction de polynômes donc elle est continue en tout point (x_0, y_0) tel que le dénominateur $x_0^2 + y_0^2$ ne s'annule pas. Donc f est continue en tout point $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Continuité en $(x_0, y_0) = (0, 0)$:

• Calcul de $f(x, y)$ en coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, pour $r > 0$

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^3 \cos^3 \theta}{r^2} = r \cos^3 \theta.$$

Par conséquent, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(r \cos \theta, r \sin \theta) - f(0, 0)| = r \underbrace{|\cos^3 \theta|}_{\leq 1} \leq r,$$

car $\text{Im} \cos = [-1, 1]$. On pose $g(r) = r$ qui vérifie $g(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$. La condition suffisante de continuité en $(0, 0)$ est démontrée.

4. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{y^2}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0, y) = 0$.

Continuité en (x_0, y_0) pour tout $x_0 \neq 0$:

L'expression $\frac{y^2}{x}$ est une fraction de polynômes donc elle est continue en tout point (x_0, y_0) tel que le dénominateur x_0 ne s'annule pas. Donc f est continue en tout point (x_0, y_0) tel que $x_0 \neq 0$.

Continuité en $(0, y_0)$ pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$:

• Calcul de $f(x, y)$ en coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, pour $r > 0$ et $\theta \neq \frac{\pi}{2} \text{ mod } (\pi)$

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^2 \sin^2 \theta}{r \cos \theta} = r \sin^2 \theta \tan \theta.$$

Comme $\text{Im} \tan = \mathbb{R}$ est non borné, on voit qu'on ne peut pas majorer $|f(r \cos \theta, r \sin \theta) - f(0, 0)|$ uniformément en θ par une expression $g(r)$ qui tend vers 0 lorsque $r \rightarrow 0$.

• On montre alors que f n'est pas continue en $(0, 0)$ sur un chemin particulier passant par ce point.

Pour $y_0 = 0$, on prend :

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow f \circ \Phi(t) = f(t^2, t) = \frac{t^2}{t^2} = 1 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1 \neq 0 = f \circ \Phi(0) = f(0, 0).$$

La limite existe mais est différente de $f \circ \Phi(0)$, donc $f \circ \Phi$ n'est pas continue en $t = 0$. Comme Φ est continue en $t = 0$, on en déduit par contraposée que f n'est pas continue en $M_0 = \Phi(0) = (0, 0)$.

Pour $y_0 \neq 0$, on prend

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ y_0 \end{pmatrix} \Rightarrow f \circ \Phi(t) = f(t, y_0) = \frac{y_0}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \infty.$$

La limite n'existe pas donc $f \circ \Phi$ n'est pas continue en $t = 0$. Comme Φ est continue en $t = 0$, on en déduit par contraposée que f n'est pas continue en $M_0 = \Phi(0) = (0, y_0)$.

5. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{1 - \cos(\sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq 0$ et $f(0, 0) = \frac{1}{2}$.

Continuité en $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$:

Par composition des fonctions *cosinus*, *racine carrée* avec un *polynôme* positif ou nul, l'expression $\cos(\sqrt{x^2 + y^2})$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Le quotient $\frac{1 - \cos(\sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 + y^2}$ définit donc une fonction continue en tout point (x_0, y_0) tel que le dénominateur $x_0^2 + y_0^2$ ne s'annule pas. Donc f est continue en tout point $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Continuité en $(x_0, y_0) = (0, 0)$:

• Calcul de $f(x, y)$ en coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, pour $r > 0$

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{1 - \cos r}{r^2} \underset{r \approx 0}{=} \frac{1 - (1 - \frac{r^2}{2} + r^2 \varepsilon(r))}{r^2}, \quad \text{avec } \varepsilon(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

En simplifiant on a $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{1}{2} - \varepsilon(r)$. Par conséquent, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(r \cos \theta, r \sin \theta) - f(0, 0)| = |\frac{1}{2} - \varepsilon(r) - \frac{1}{2}| = |\varepsilon(r)|,$$

On pose $g(r) = |\varepsilon(r)|$ qui vérifie $g(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$. La condition suffisante de continuité en $(0, 0)$ est démontrée.

6. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{1 - \cos x}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq 0$ et $f(0, 0) = \frac{1}{2}$.

Continuité en $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$:

L'expression $\frac{1 - \cos(x)}{x^2 + y^2}$ est un quotient de fonctions continues donc elle est continue en tout point (x_0, y_0) tel que le dénominateur $x_0^2 + y_0^2$ ne s'annule pas. Donc f est continue en tout point $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Continuité en $(x_0, y_0) = (0, 0)$:

• Calcul de $f(x, y)$ en coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$.

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{1 - \cos(r \cos \theta)}{r^2} \underset{r \approx 0}{=} \frac{1 - (1 - \frac{(r \cos \theta)^2}{2} + r^2 \varepsilon(r))}{r^2}, \quad \text{avec } \varepsilon(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

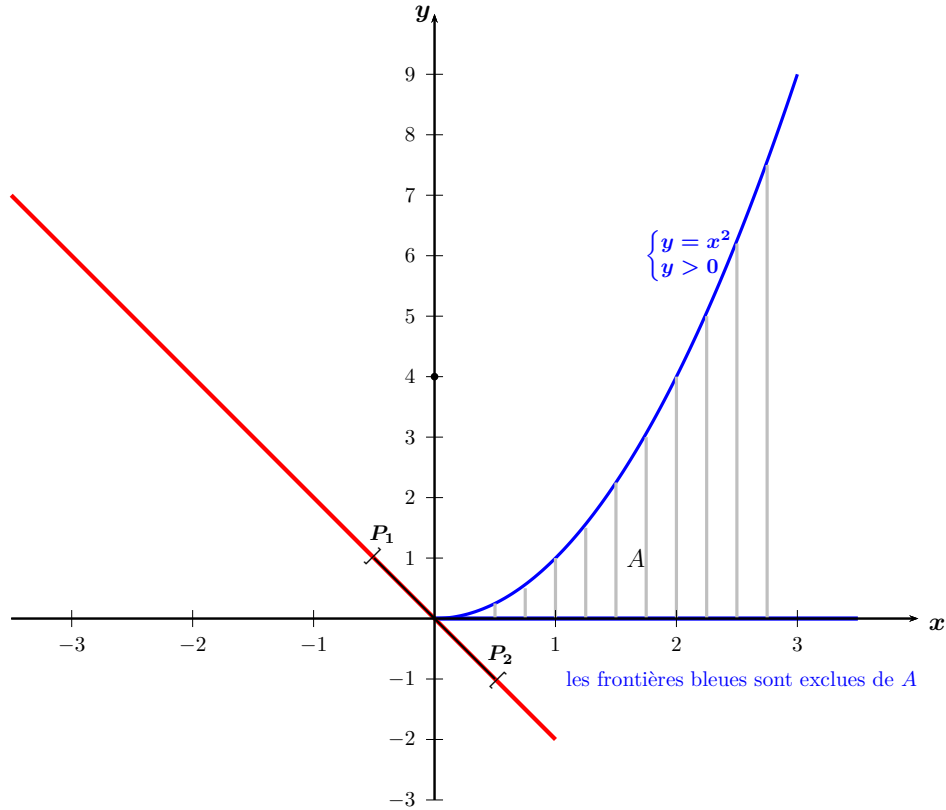
En simplifiant on a $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{\cos^2 \theta}{2} - \varepsilon(r)$. Comme à la question 2., on voit que pour différentes directions $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$, la limite lorsque $r \rightarrow 0$ n'est pas $f(0, 0) = \frac{1}{2}$.

• On montre alors que f n'est pas continue en $(0, 0)$ sur un chemin particulier passant ce point.

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow f \circ \Phi(t) = f(0, t) = \frac{1 - \cos 0}{t^2} = \frac{0}{t^2} = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \neq \frac{1}{2} = f \circ \Phi(0) = f(0, 0).$$

La limite existe mais est différente de $f \circ \Phi(0)$, donc $f \circ \Phi$ n'est pas continue en $t = 0$. Comme Φ est continue en $t = 0$, on en déduit par contraposée que f n'est pas continue en $M_0 = \Phi(0) = (0, 0)$.

Exercice A.2.8 du poly. Soit $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ et } 0 < y < x^2\}$.



1. Noter que

$$(x, y) \in A \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } y > 0 \text{ et } y < x^2.$$

$$(x, y) \notin A \Leftrightarrow x \leq 0 \text{ ou } y \leq 0 \text{ ou } y \geq x^2.$$

Par intervalle, on entend un segment reliant deux point P_1 et P_2 dans le plan. Il est ouvert si on exclut les extrémités P_1 et P_2 .

On distingue les cas $(x = 0)$ et $(y = ax)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

- La droite d'équation $x = 0$ est incluse dans l'ensemble $\mathbb{R}^2 \setminus A$. Il s'agit de l'axe des ordonnées qui contient une infinité d'un intervalles ouverts $\{0\} \times]-\eta, +\eta[$, $\eta > 0$ centrés en l'origine.

-

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}, & \text{si } a \leq 0 \\ x \leq a, & \text{si } a > 0. \end{cases}$$

Pour $a > 0$, l'ensemble $\{(x, ax) \in \mathbb{R}^2; x \in]-a, a[\}$ est un intervalle ouvert inclu dans l'ensemble $\mathbb{R}^2 \setminus A$:

$$a > 0 \text{ et } |x| < a \Rightarrow (x \leq 0) \text{ ou } (x > 0 \text{ et } x^2 < ax) \Rightarrow (x, ax) \notin A.$$

Pour $a \leq 0$, la droite d'équation $y = ax$ est incluse dans $\mathbb{R}^2 \setminus A$ et supporte une infinité d'intervalles ouverts $\{(x, ax) \in \mathbb{R}^2; x \in]-\eta, \eta[\}$, $\eta > 0$ centrés en l'origine :

$$a \leq 0 \text{ et } x \in]-\eta, +\eta[\Rightarrow (x \leq 0) \text{ ou } (x > 0 \text{ et } a \leq 0) \Rightarrow (x \leq 0) \text{ ou } (ax \leq 0) \Rightarrow (x, ax) \notin A$$

2. On définit la fonction $f; \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x, y) = 0$ si $(x, y) \notin A$ et $f(x, y) = 1$ si $(x, y) \in A$.

(i) Soit $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose $g_h(t) = f(th) = f(th_1, th_2)$. On distingue les deux cas suivants :

- Soit $h_1 = 0$ et dans ce cas l'ensemble des points $\{(0, th_2); t \in \mathbb{R}\}$ s'identifie à la droite d'équation $x = 0$, elle même incluse dans $\mathbb{R}^2 \setminus A$. Cela signifie que $g_h(t) = 0$ pour tout t dans $\mathbb{R}$ donc g_h est continue en $t = 0$.
- Soit $h_1 \neq 0$ et dans ce cas l'ensemble des points $\{(th_1, th_2); t \in \mathbb{R}\}$ s'identifie à la droite d'équation $y = \frac{h_2}{h_1}x$. D'après la question **1.** il existe $\eta > 0$ (un voisinage) tel que

$$|t| < \eta \Rightarrow (th_1, th_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus A \Rightarrow g_h(t) = 0.$$

Par conséquent, g_h est constante égale à 0 au voisinage de $t = 0$ donc elle y est continue.

Conclusion : Quel que soit $h \in \mathbb{R}^2$, la fonction g_h est continue en 0.

(ii) la fonction f n'est pas continue. Il suffit de choisir le chemin d'équation $y = \frac{x^2}{2}$ défini par

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix} \Rightarrow f \circ \Phi(t) = f(t, \frac{1}{2}t^2) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Les limites à gauche et à droite de $t = 0$ ne sont pas égales donc la fonction $f \circ \Phi$ n'est pas continue en $t = 0$. Comme Φ est continue en $t = 0$, on en déduit par contraposée que f n'est pas continue en $M_0 = \Phi(0)$.