

Exercice A.2.9 du poly. (*Indication : utiliser les contraposées des liens logiques vus en cours pour répondre aux questions*).

$$2. f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

La fonction f est symétrique en les variables x et y : $f(x, y) = f(y, x)$.

(a) l'application f est continue en $(0, 0)$. En effet, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^2 \sin\left(\frac{\cos \theta + \sin \theta}{r}\right).$$

Donc, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $|f(r \cos \theta, r \sin \theta) - f(0, 0)| = r^2 \underbrace{|\sin\left(\frac{\cos \theta + \sin \theta}{r}\right)|}_{\leq 1} \leq r^2$, car $\text{Im sin} = [-1, 1]$. On pose

$g(r) = r^2$ qui vérifie $g(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$. La condition suffisante de continuité est vérifiée.

(b) • $\frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{h^2 \sin\left(\frac{h+0}{h^2}\right) - 0}{h} = h \sin\left(\frac{1}{h}\right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Donc $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0}$.

• Par symétrie, $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0}$.

(c) On calcule $\varepsilon(h, k)$ tel que

$$f(0+h, 0+k) = \underbrace{f(0, 0)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}_{=0} \times h + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}_{=0} \times k + \sqrt{h^2 + k^2} \varepsilon(h, k).$$

On a donc $\varepsilon(h, k) = \frac{f(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \sqrt{h^2 + k^2} \sin\left(\frac{h+k}{h^2+k^2}\right)$.

On vérifie alors si $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(h, k) = 0$ ou non. Cela revient à étudier la continuité de la fonction ε en posant $\varepsilon(0, 0) = 0$. On regarde l'expression en coordonnées polaires : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\varepsilon(r \cos \theta, r \sin \theta) = r \sin\left(\frac{\cos \theta + \sin \theta}{r}\right).$$

Par conséquent, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon(r \cos \theta, r \sin \theta) - 0| = r \underbrace{|\sin\left(\frac{\cos \theta + \sin \theta}{r}\right)|}_{\leq 1} \leq r$, car $\text{Im sin} = [-1, 1]$. On pose

$g(r) = r$ qui vérifie $g(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$. La condition suffisante de continuité est vérifiée pour ε .

(d) On commence par calculer les dérivées partielles premières en tout point $(x, y) \neq (0, 0)$.

• $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right) + (x^2+y^2) \times \frac{(x^2+y^2) - 2x(x+y)}{(x^2+y^2)^2} \cos\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = 2x \sin\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) + \frac{y^2 - 2xy - x^2}{x^2+y^2} \cos\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$.

• Par symétrie, on obtient $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \sin\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right) + \frac{x^2 - 2xy - y^2}{x^2+y^2} \cos\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$.

Ensuite, on étudie la continuité en $(0, 0)$ pour $\frac{\partial f}{\partial x}$. Par symétrie, le résultat sera le même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Prenons le chemin d'équation $x = -y$ passant par l'origine. Il est décrit par la fonction $\Phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$

avec $\Phi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Φ est continue en 0 et

$$\frac{\partial f}{\partial x} \circ \Phi(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, -t) = 2t \sin(0) + \frac{-2t^2}{2t^2} \cos(0) = -1 \xrightarrow{t \rightarrow 0} -1 \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

La limite existe mais est différente de $\frac{\partial f}{\partial x} \circ \Phi(0)$, donc $\frac{\partial f}{\partial x} \circ \Phi$ n'est pas continue en $t = 0$. Comme Φ est continue en $t = 0$, on en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0, 0)$.

$$3. f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) l'application f n'est pas continue en $(0, 0)$. En effet, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \cos \theta \sin^2 \theta.$$

Les limites ponctuelle diffèrent selon les directions $\theta \in \mathbb{R}$. On ne peut pas démontrer la condition suffisante de continuité.

Prenons le chemin d'équation $x = y$ passant par l'origine. Il est décrit par la fonction $\Phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$

avec $\Phi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Φ est continue en 0 et

$$f \circ \Phi(t) = f(t, t) = \frac{t^3}{(2t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq f(0, 0) = 0.$$

La limite existe mais est différente de $f \circ \Phi(0)$, donc $f \circ \Phi$ n'est pas continue en $t = 0$. Comme Φ est continue en $t = 0$, on en déduit que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

$$(b) \bullet \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{\frac{h \times 0^2}{h^2} - 0}{h} = 0 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \text{ Donc } \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0}.$$

$$\bullet \frac{f(0, 0+k) - f(0, 0)}{k} = \frac{\frac{0 \times k^2}{k^2} - 0}{h} = 0 \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0. \text{ Donc } \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0}.$$

(c) Par contraposée, f n'est pas continue en $(0, 0)$ donc f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

(d) Par contraposée, f n'est pas continue en $(0, 0)$ donc aucune des dérivées partielles n'est continue en $(0, 0)$. Vérification :

On commence par calculer les dérivées partielles premières en tout point $(x, y) \neq (0, 0)$.

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \times 2x(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \times xy^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}(-2x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, t) = \frac{|t|t^4}{t^6} = \frac{1}{|t|} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \infty.$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2xy(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \times 2y(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \times xy^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}(-xy^3+2yx^3)}{(x^2+y^2)^3} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(t, t) = \frac{\sqrt{2}|t|t^4}{8t^6} = \frac{\sqrt{2}}{8|t|} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \infty.$$

$$4. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) l'application f est continue en $(0, 0)$. En effet, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = r \cos^3 \theta.$$

Donc, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $|f(r \cos \theta, r \sin \theta) - f(0, 0)| = r \underbrace{|\cos^3 \theta|}_{\leq 1} \leq r$, car $\text{Im} \cos = [-1, 1]$. On pose $g(r) = r$

qui vérifie $g(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$. La condition suffisante de continuité est vérifiée.

$$(b) \bullet \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = 1 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1. \text{ Donc } \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1}.$$

$$\bullet \frac{f(0, 0+k) - f(0, 0)}{k} = \frac{\frac{0^3}{k^2} - 0}{h} = 0 \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0. \text{ Donc } \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0}.$$

(c) On calcule $\varepsilon(h, k)$ tel que

$$f(0+h, 0+k) = \underbrace{f(0, 0)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}_{=1} \times h + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}_{=0} \times k + \sqrt{h^2 + k^2} \varepsilon(h, k).$$

On a donc $\varepsilon(h, k) = \frac{f(h, k) - h}{\sqrt{h^2 + k^2}} = -\frac{hk^2}{(h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Cette fonction a été étudiée à la question **3a**). En posant $\varepsilon(0, 0) = 0$, on sait que ε n'est pas continue en $(0, 0)$. On en déduit que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

- (d) Par contraposée, f n'est pas différentiable en $(0, 0)$ donc aucune des dérivées partielles n'est continue en $(0, 0)$.

5. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. La fonction f est symétrique en les variables x et y : $f(x, y) = f(y, x)$.

- (a) l'application f est continue en $(0, 0)$. En effet, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = r.$$

Donc, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $|f(r \cos \theta, r \sin \theta) - f(0, 0)| = r$. On pose $g(r) = r$ qui vérifie $g(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$. La condition suffisante de continuité est vérifiée.

- (b) • $\frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{\sqrt{h^2} - 0}{h} = \frac{|h|}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0}$ pas de limite. Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ n'existe pas.

• Par symétrie, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ n'existe pas.

- (c) Les nombres $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $B = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ n'existent pas donc la différentiabilité de f ne peut pas être démontrée.

- (d) Les nombres $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $B = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ n'existent pas donc les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne sont pas définies en $(0, 0)$. La continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne peut pas être démontrée.

Exercice hors poly. Fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Montrer que la fonction définie par

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

(Indication : il faut démontrer la continuité des dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$).

Dérivées partielles en $(0, 0)$ de p .

$$\begin{aligned} \bullet \frac{p(0+h, 0) - p(0, 0)}{h} &= \frac{\frac{h \times 0^3}{h^4} - 0}{h} = 0 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \text{ Donc } \boxed{\frac{\partial p}{\partial x}(0, 0) = 0}. \\ \bullet \frac{p(0, 0+k) - p(0, 0)}{k} &= \frac{\frac{0 \times k^3}{k^2} - 0}{k} = 0 \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0. \text{ Donc } \boxed{\frac{\partial p}{\partial y}(0, 0) = 0}. \end{aligned}$$

Dérivées partielles en tout point $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial p}{\partial x}(x, y) &= \frac{y^3(x^4+y^2) - 4x^3 \times xy^3}{(x^4+y^2)^2} = \frac{-3x^4y^3+y^5}{(x^4+y^2)^2} \\ \bullet \frac{\partial p}{\partial y}(x, y) &= \frac{3xy^2(x^4+y^2) - 2y \times xy^3}{(x^4+y^2)^2} = \frac{xy^4+3x^5y^2}{(x^4+y^2)^2} \end{aligned}$$

Étude de la continuité des dérivées partielles premières.

- En tant que quotient de polynômes, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en tout point (x_0, y_0) où le dénominateur ne s'annule pas, c'est à dire $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.
- On majore l'écart en coordonnées cartésiennes pour commencer :

$$\left| \frac{\partial p}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial p}{\partial x}(0, 0) \right| = \frac{|-3x^4y^3+y^5|}{x^8+2x^4y^2+y^4} \leq \frac{3x^4|y|^3}{x^8+2x^4y^2+y^4} + \frac{|y|^5}{x^8+2x^4y^2+y^4} \leq \frac{3x^4|y|^3}{2x^4y^2} + \frac{|y|^5}{y^4} = \frac{5}{2}|y|$$

On peut conclure en coordonnées polaires : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\left| \frac{\partial p}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) - \frac{\partial p}{\partial x}(0, 0) \right| \leq \frac{5}{2}r \underbrace{|\sin \theta|}_{\leq 1} \leq \frac{5}{2}r.$$

On pose $g(r) = \frac{5}{2}r$ qui vérifie $g(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$. La condition suffisante de continuité est vérifiée par $\frac{\partial p}{\partial x}$ en $(0, 0)$.

- On majore l'écart en coordonnées cartésiennes pour commencer :

$$\left| \frac{\partial p}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial p}{\partial y}(0, 0) \right| = \frac{|xy^4+3x^5y^2|}{x^8+2x^4y^2+y^4} \leq \frac{|x|y^4}{x^8+2x^4y^2+y^4} + \frac{3|x|^5y^2}{x^8+2x^4y^2+y^4} \leq \frac{|x|y^4}{y^4} + \frac{3|x|^5y^2}{2x^4y^2} = \frac{5}{2}|x|$$

On peut conclure en coordonnées polaires : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\left| \frac{\partial p}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) - \frac{\partial p}{\partial y}(0, 0) \right| \leq \frac{5}{2}r \underbrace{|\cos \theta|}_{\leq 1} \leq \frac{5}{2}r.$$

On pose $g(r) = \frac{5}{2}r$ qui vérifie $g(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$. La condition suffisante de continuité est vérifiée par $\frac{\partial p}{\partial y}$ en $(0, 0)$.