

Exercice A.2.13 du poly. Calcul de dérivées partielles pour 3 variables

2. $f(x, y) = \sin(x \sin y)$. Le domaine de définition est $\mathbb{R}^2$. La fonction f est infiniment différentiable sur son domaine de définition car composée de fonction usuelle.

$$df(x, y) = \sin(y) \cos(x \sin(y)) dx + x \cos(y) \cos(x \sin y) dy.$$

6. $f(x, y, z) = \sin(x \sin(y \sin(z)))$. Le domaine de définition est $\mathbb{R}^3$. La fonction f est infiniment différentiable sur son domaine de définition car composée de fonctions usuelles.

$$\begin{aligned} df(x, y, z) = & \sin(y \sin(z)) \cos(x \sin(y \sin(z))) dx \\ & + x \sin(z) \cos(y \sin(z)) \cos(x \sin(y \sin(z))) dy \\ & + xy \cos(z) \cos(y \sin(z)) \cos(x \sin(y \sin(z))) dz . \end{aligned}$$

Exercice A.2.14 du poly. Dérivées partielles de fonctions composées

Comme ce n'est pas indiqué, les fonctions sont considérées dérivables/différentiables sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$.

1. $F(x, y) = f(x + y)$.

- La fonction f une fonction d'une variable dérivable.
- Par composition, la fonction F est différentiable.

$$\begin{aligned} dF(x, y) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)dy \\ &= f'(x + y)dx + f'(x + y)dy = f'(x + y)[dx + dy]. \end{aligned}$$

2. $F(x, y) = f(g(x)k(y), g(x) + h(y))$.

- La fonction f est une fonction de deux variables (disons u et v) différentiable.
- Les fonctions g , h et k sont trois fonctions d'une variable dérivable.
- Par composition, somme et produit, la fonction F est différentiable.

$$\begin{aligned} dF(x, y) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)dy \\ &= \left[g'(x)k(y) \frac{\partial f}{\partial u}(g(x)k(y), g(x) + h(y)) + g'(x) \frac{\partial f}{\partial v}(g(x)k(y), g(x) + h(y)) \right] dx \\ &\quad + \left[g(x)k'(y) \frac{\partial f}{\partial u}(g(x)k(y), g(x) + h(y)) + h'(y) \frac{\partial f}{\partial v}(g(x)k(y), g(x) + h(y)) \right] dy. \end{aligned}$$

3. $F(x, y, z) = f(g(x + y), h(y + z))$.

- La fonction f est une fonction de deux variables (disons u et v) différentiable.
- Les fonctions g et h sont deux fonctions d'une variable dérivable.
- Par composition, la fonction F est différentiable.

$$\begin{aligned} dF(x, y, z) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)dy + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)dz \\ &= g'(x + y) \frac{\partial f}{\partial u}(g(x + y), h(y + z))dx \\ &\quad + \left(g'(x + y) \frac{\partial f}{\partial u}(g(x + y), h(y + z)) + h'(y + z) \frac{\partial f}{\partial v}(g(x + y), h(y + z)) \right) dy \\ &\quad + h'(y + z) \frac{\partial f}{\partial v}(g(x + y), h(y + z))dz. \end{aligned}$$