

Exercice A.2.5. Équations de plans

1. $\mathcal{P}$ est le plan perpendiculaire à la direction $\vec{n} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ et passant par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Equation cartésienne implicite : On utilise la caractérisation

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$$

On obtient l'équation implicite

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}.$$

2. $\mathcal{P}$ est le plan parallèle aux directions $\vec{u}_1 = (a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$ et $\vec{u}_2 = (a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$ et passant par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont bien-entendu non colinéaires et $(M_0, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est un repère (non nécessairement orthonormé) du plan $\mathcal{P}$.

Equation cartésienne implicite : Comme les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont supposés non colinéaires, le produit vectoriel fournit un vecteur orthogonal $\vec{n}$ non nul et

$$\vec{n} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on procède comme à la question 1 et on obtient

$$\boxed{(b_2c_3 - b_3c_2)(x - x_0) + (b_3c_1 - b_1c_3)(y - y_0) + (b_1c_2 - b_2c_1)(z - z_0) = 0}$$

Application : $M_0(3, 1, 0)$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On trouve $\boxed{4(x - 1) - 5(y - 1) - 6z = 0}$ ou $\boxed{4x - 5y - 6z = 7}$

Exercice A.2.7. Courbes de l'espace

1.

(1) Le système $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 3 \end{cases}$ caractérise l'intersection d'un cylindre de révolution autour de l'axe (Oz) avec le plan horizontal d'équation $z = 3$. Graphiquement, on obtient le cercle $\mathcal{C}_1$ de couleur rouge ci-dessous. Une paramétrisation de ce cercle est

$$M(x, y, z) \in \mathcal{C}_1 \iff \exists \theta \in [0; 2\pi[, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 3 \end{pmatrix} .$$

(2) Le système $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ caractérise l'intersection d'un cylindre de révolution autour de l'axe (Oz) avec le plan oblique d'équation $x + y + z = 1$. Graphiquement, on obtient la courbe $\mathcal{C}_2$ de couleur bleue ci-dessous.

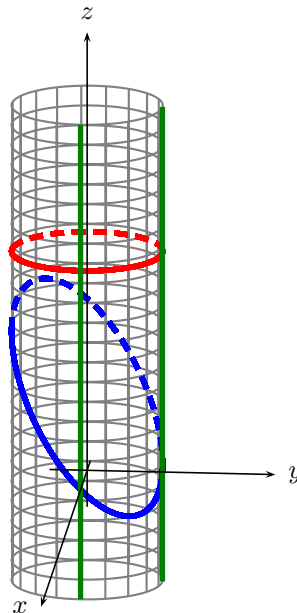
Une paramétrisation de cette courbe est

$$M(x, y, z) \in \mathcal{C}_2 \iff \exists \theta \in [0; 2\pi[, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 1 - \cos \theta - \sin \theta \end{pmatrix} .$$

(3) Le système $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ caractérise l'intersection d'un cylindre de révolution autour de l'axe (Oz) avec le plan vertical d'équation $x + y = 1$. Il suffit de résoudre ce système de deux équations à deux inconnues. Graphiquement, on obtient la courbe $\mathcal{C}_3$ de couleur verte ci-dessous, constituée de droites verticales d'équations $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$.

Une paramétrisation de cette courbe est

$$M(x, y, z) \in \mathcal{C}_3 \iff \exists t \in \mathbb{R} , \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Psi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} .$$



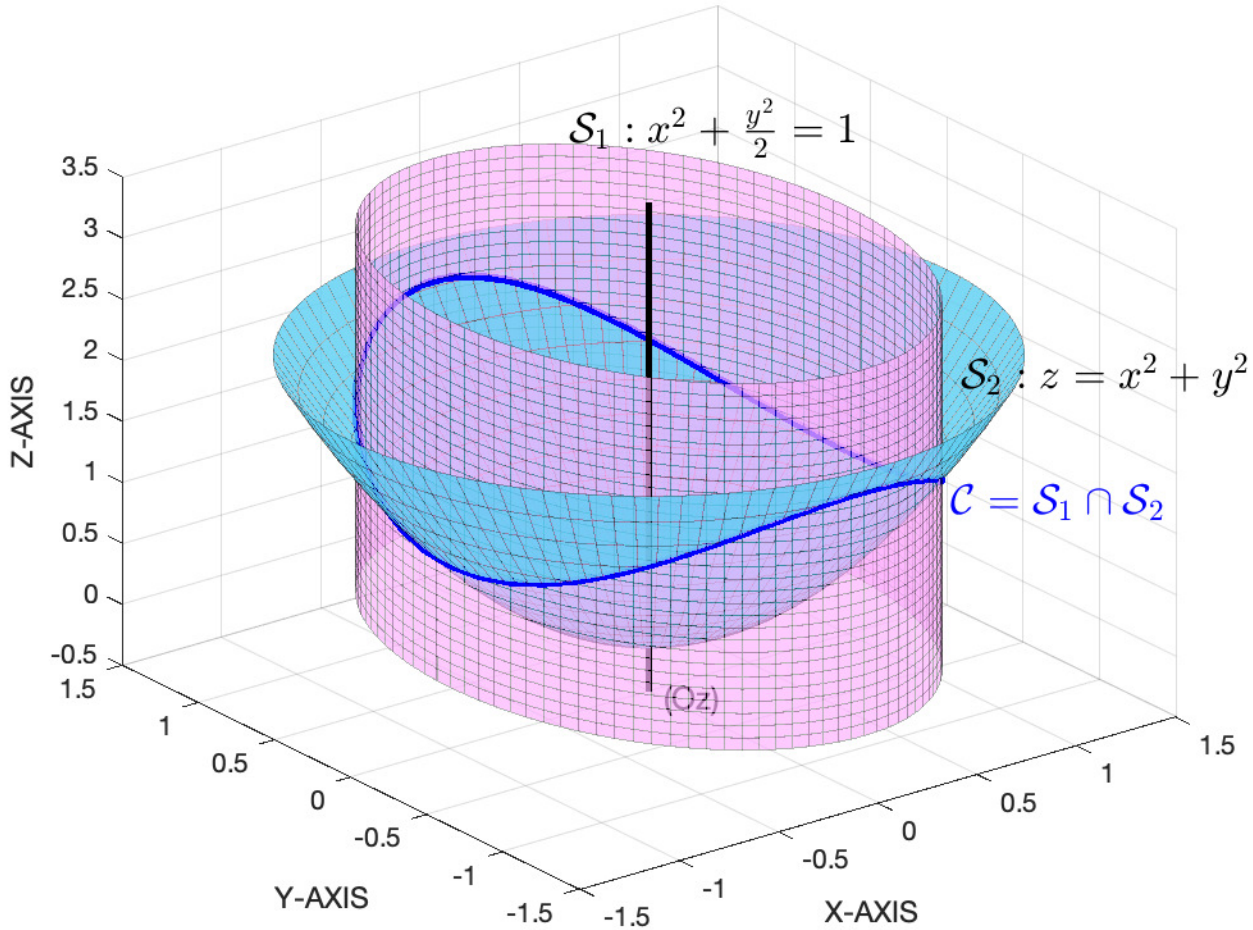
2. Le système $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1 \end{cases}$ caractérise l'intersection d'un parabolôide de révolution autour de l'axe (Oz) avec un cylindre elliptique centré en l'origine, d'axe (Oz) et demi-axes de longueur $a = 1$ et $b = \sqrt{2}$. Graphiquement, on obtient la courbe $\mathcal{C}_4$ de couleur rouge ci-dessous.

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2 - x^2 \\ x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 + \frac{1}{2}y^2 \\ x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1 \end{cases}$$

Une paramétrisation de cette courbe est

$$M(x, y, z) \in \mathcal{C}_4 \iff \exists \theta \in [0; 2\pi[, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sqrt{2} \sin \theta \\ 2 - \cos^2 \theta = 1 + \sin^2 \theta \end{pmatrix} .$$

Intersection cylindre ($\mathcal{S}_1$)/parabolôide($\mathcal{S}_2$)



Un vecteur tangent à la droite tangente $\mathcal{T}$ à cette courbe au point $M(x_0 = x(\theta_0), y_0 = y(\theta_0), z_0 = z(\theta_0))$

est

$$\Phi'(\theta_0) = \begin{pmatrix} -\sin \theta_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}y_0 \\ \sqrt{2} \cos \theta_0 = \sqrt{2}x_0 \\ 2 \cos \theta_0 \sin \theta_0 = \sqrt{2}x_0 y_0 \end{pmatrix} .$$

La droite tangente $\mathcal{T}$ est donc paramétrée par

$$M(x, y, z) \in \mathcal{T} \iff \exists t \in \mathbb{R}, M = M_0 + t\Phi'(\theta_0) \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 - t \sin \theta_0 = x_0 - t \frac{y_0}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2}(\sin \theta_0 + t \cos \theta_0) = y_0 + t x_0 \sqrt{2} \\ 1 + \sin^2 \theta_0 + t \sin 2\theta_0 = z_0 + t x_0 y_0 \sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

Chapitre 3. Exercice A.2.6 Surfaces de $\mathbb{R}^3$

Exemple : (1) $x^2 + \alpha y^2 + z^2 = 1$.

• Si $\alpha > 0$, on réécrit l'équation $x^2 + \frac{y^2}{(\sqrt{\frac{1}{\alpha}})^2} + z^2 = 1$. C'est un ellipsoïde centré en l'origine d'axes dirigés selon les direction (Ox) , (Oy) , (Oz) et de demi-axes de longueurs 1, $\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$ et 1 respectivement. Une paramétrisation possible est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \theta \in [0; \pi], \varphi \in [0; 2\pi].$$

• si $\alpha = 0$, on obtient l'équation $x^2 + z^2 = 1$. Cela ressemble à l'équation du cylindre. La variable y n'apparaît pas. C'est un cylindre infini de révolution autour de l'axe (Oy) de rayon 1. Une paramétrisation est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ y \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}, \varphi \in [0; 2\pi].$$

• Si $\alpha < 0$, on réécrit l'équation $x^2 - \frac{y^2}{(\sqrt{-\frac{1}{\alpha}})^2} + z^2 = 1$. Cela ressemble à l'équation de l'hyperboloïde à une nappe avec cette fois un signe moins devant y^2 . C'est un hyperboloïde à une nappe de révolution autour de l'axe (Oy) . Une paramétrisation possible s'obtient en réécrivant l'équation sous la forme

$$x^2 + z^2 = \underbrace{\left(\sqrt{1 - \alpha y^2} \right)^2}_{R^2}$$

puis en utilisant les coordonnées cylindriques :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \alpha y^2} \cos \varphi \\ y \\ \sqrt{1 - \alpha y^2} \sin \varphi \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}, \varphi \in [0; 2\pi].$$

(2) $-2x^2 + y^2 + z^2 = \alpha$.

• Si $\alpha > 0$, on réécrit l'équation $-\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 = 1$. C'est un hyperboloïde à une nappe de révolution autour de l'axe (Ox) . En écrivant $y^2 + z^2 = \left(\sqrt{\alpha + 2x^2}\right)^2$, une paramétrisation possible est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{\alpha + 2x^2} \cos \varphi \\ \sqrt{\alpha + 2x^2} \sin \varphi \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}, \varphi \in [0; 2\pi].$$

• si $\alpha = 0$, on réécrit l'équation $x^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2$. C'est un cône de révolution autour de l'axe (Ox) . En écrivant $y^2 + z^2 = (\sqrt{2}|x|)^2$, une paramétrisation est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{2}|x| \cos \varphi \\ \sqrt{2}|x| \sin \varphi \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}, \varphi \in [0; 2\pi].$$

- Si $\alpha < 0$, on réécrit l'équation $\left(\frac{x}{\sqrt{-\frac{\alpha}{2}}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{-\alpha}}\right)^2 - \left(\frac{z}{\sqrt{-\alpha}}\right)^2 = 1$. C'est un hyperboloïde à deux nappes de révolution autour de l'axe (Ox) . Une paramétrisation possible est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{\alpha + 2x^2} \cos \varphi \\ \sqrt{\alpha + 2x^2} \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad x \in]-\infty; -\sqrt{-\frac{\alpha}{2}}] \cup [\sqrt{-\frac{\alpha}{2}}; +\infty[, \quad \varphi \in [0; 2\pi].$$

Chapitre 3. Exercice A.2.8 Courbes et intersection de surfaces de $\mathbb{R}^3$

On considère deux surfaces de $\mathbb{R}^3$ définies par les paramétrisations suivantes :

$$\mathcal{S}_1 := \left\{ M \begin{pmatrix} u + v + \frac{1}{3} \\ u - 2v + \frac{1}{3} \\ -2u + v + \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid u, v \in \mathbb{R} \right\} ,$$

$$\mathcal{S}_2 := \left\{ M \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid u, v \in \mathbb{R} \right\} .$$

1.
 - La surface $\mathcal{S}_1$ est un plan d'équation $x + y + z = 1$.
 - La surface $\mathcal{S}_2$ est un parabolôïde de révolution autour de l'axe (Oz) d'équation $z = x^2 + y^2$.
2. A faire !