Exercice A.2.5. Équations de plans
1. $\mathscr{P}$ est le plan perpendiculaire à la direction $\vec{n} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0\}$ et passant par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Equation cartésienne implicite : On utilise la caractérisation

$$M \in \mathscr{P} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$$

On obtient l'équation implicite

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}.$$

2. $\mathscr{P}$ est le plan parallèle aux directions $\vec{u}_1 = (a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$ et $\vec{u}_2 = (a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$ et passant par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$.
Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont bien-entendu non colinéaires et $(M_0, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est un repère (non nécessairement orthonormé) du plan $\mathscr{P}$.

Equation cartésienne implicite : Comme les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont supposés non colinéaires, le produit vectoriel fourni un vecteur orthogonal $\vec{n}$ non nul et

$$\vec{n} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on procède comme à la question 1 et on obtient

$$\boxed{(b_2c_3 - b_3c_2)(x - x_0) + (b_3c_1 - b_1c_3)(y - y_0) + (b_1c_2 - b_2c_1)(z - z_0) = 0}$$

Application : $M_0(3, 1, 0)$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On trouve $\boxed{4(x - 1) - 5(y - 1) - 6z = 0}$ ou $\boxed{4x - 5y - 6z = 7}$

Exercice A.2.7. Courbes de l'espace
1.
(1) Le système $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ z=3 \end{array}\right.$ caractérise l'intersection d'un cylindre de révolution autour de l'axe (Oz) avec le plan horizontal d'équation $z=3$. Graphiquement, on obtient le cercle $\mathcal{C}_1$ de couleur rouge ci-dessous.
Une paramétrisation de ce cercle est

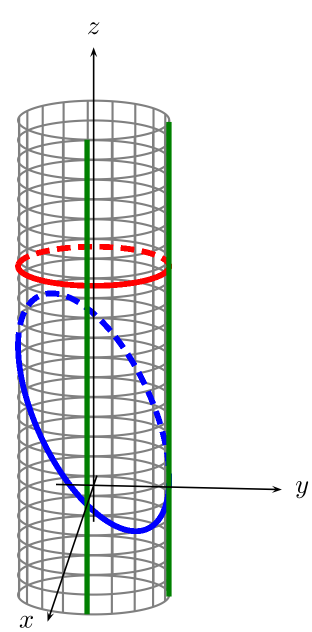
$$M(x,y,z)\in\mathcal{C}_1 \Longleftrightarrow \exists\,\theta\in[0;2\pi[\ ,\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\Phi(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 3\end{pmatrix}\ .$$

(2) Le système $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right.$ caractérise l'intersection d'un cylindre de révolution autour de l'axe (Oz) avec le plan oblique d'équation $x+y+z=1$. Graphiquement, on obtient la courbe $\mathcal{C}_2$ de couleur bleue ci-dessous.
Une paramétrisation de cette courbe est

$$M(x,y,z)\in\mathcal{C}_2 \Longleftrightarrow \exists\,\theta\in[0;2\pi[\ ,\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\Phi(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 1-\cos\theta-\sin\theta\end{pmatrix}\ .$$

(3) Le système $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x+y=1 \end{array}\right.$ caractérise l'intersection d'un cylindre de révolution autour de l'axe (Oz) avec le plan vertical d'équation $x+y=1$. Il suffit de résoudre ce système de deux équations à deux inconnues. Graphiquement, on obtient la courbe $\mathcal{C}_3$ de couleur verte ci-dessous, constituée de droites verticales d'équations $\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \end{array}\right.$.
Une paramétrisation de cette courbe est

$$M(x,y,z)\in\mathcal{C}_3 \Longleftrightarrow \exists\,t\in\mathbb{R}\ ,\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\Phi_1(t)=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ t\end{pmatrix}\ \text{ou}\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\Psi(t)=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ t\end{pmatrix}\ .$$

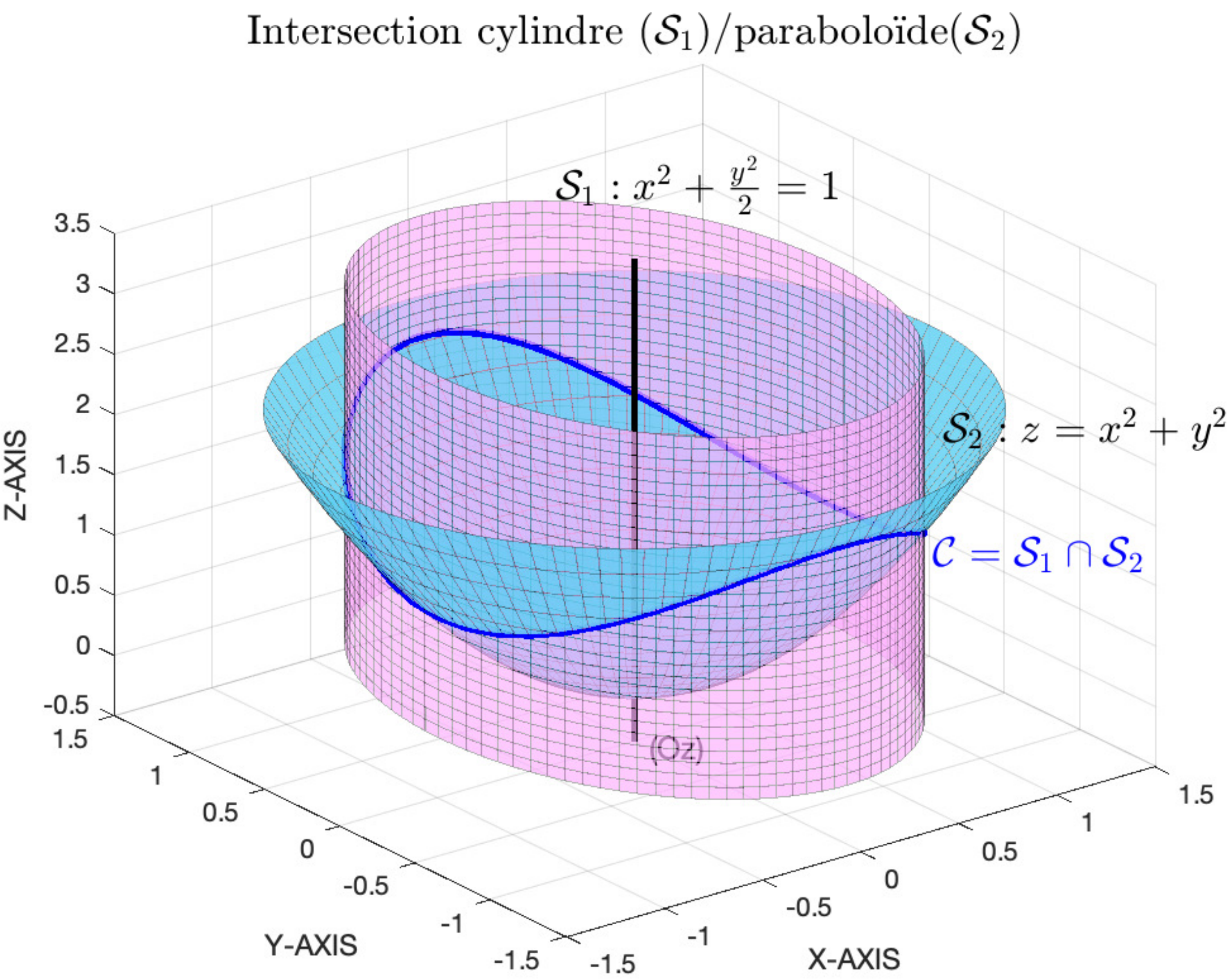


2. Le système $\left\{\begin{array}{l} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1 \end{array}\right.$ caractérise l'intersection d'un paraboloïde de révolution autour de l'axe (Oz) avec un cylindre elliptique centré en l'origine, d'axe (Oz) et demi-axes de longueur $a = 1$ et $b = \sqrt{2}$. Graphiquement, on obtient la courbe $\mathcal{C}_4$ de couleur rouge ci-dessous.

$$\left\{\begin{array}{l} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} z = 2 - x^2 \\ x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} z = 1 + \frac{1}{2}y^2 \\ x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1 \end{array}\right.$$

Une paramétrisation de cette courbe est

$$M(x, y, z) \in \mathcal{C}_4 \iff \exists\, \theta \in [0; 2\pi[\ , \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sqrt{2}\sin\theta \\ 2 - \cos^2\theta = 1 + \sin^2\theta \end{pmatrix} .$$



Un vecteur tangent à la droite tangente $\mathcal{T}$ à cette courbe au point $M(x_0 = x(\theta_0)\,, y_0 = y(\theta_0)\,, z_0 = z(\theta_0))$

est

$$\Phi'(\theta_0) = \begin{pmatrix} -\sin\theta_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} y_0 \\ \sqrt{2}\cos\theta_0 = \sqrt{2} x_0 \\ 2\cos\theta_0 \sin\theta_0 = \sqrt{2} x_0 y_0 \end{pmatrix} \ .$$

La droite tangente $\mathcal{T}$ est donc paramétrée par

$$M(x,y,z) \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{R}\ ,\ M = M_0 + t\Phi'(\theta_0) \Longleftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{R}\ ,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 - t\sin\theta_0 = x_0 - t\frac{y_0}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2}(\sin\theta_0 + t\cos\theta_0) = y_0 + t x_0\sqrt{2} \\ 1 + \sin^2\theta_0 + t\sin 2\theta_0 = z_0 + t x_0 y_0 \sqrt{2} \end{pmatrix} \ .$$

Chapitre 3. Exercice A.2.6 Surfaces de $\mathbb{R}^3$

Exemple : **(1)** $x^2 + \alpha y^2 + z^2 = 1$.

• Si $\alpha > 0$, on réécrit l'équation $x^2 + \frac{y^2}{(\sqrt{\frac{1}{\alpha}})^2} + z^2 = 1$. C'est un ellipsoïde centré èn l'origine d'axes dirigés selon les direction (Ox), (Oy), (Oz) et de demi-axes de longueurs 1, $\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$ et 1 respectivement. Une paramétrisation possible est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sqrt{\frac{1}{\alpha}}\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \ , \theta \in [0;\pi],\ \varphi \in [0;2\pi] \ .$$

• si $\alpha = 0$, on obtient l'équation $x^2 + z^2 = 0$. Cela ressemble à l'équation du cylindre. La variable y n'apparaît pas. C'est un cylindre infini de révolution autour de l'axe (Oy) de rayon 1. Une paramétrisation est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ y \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \ , y \in \mathbb{R},\ \varphi \in [0;2\pi] \ .$$

• Si $\alpha < 0$, on réécrit l'équation $x^2 - \frac{y^2}{(\sqrt{-\frac{1}{\alpha}})^2} + z^2 = 1$. Cela ressemble à l'équation de l'hyperboloïde à une nappe avec cette fois un signe moins devant y^2. C'est un hyperboloïde à une nappe de révolution autour de l'axe (Oy). Une paramétrisation possible s'obtient en réécrivant l'équation sous la forme

$$x^2 + z^2 = \underbrace{\left(\sqrt{1-\alpha y^2}\right)^2}_{R^2}$$

puis en utilisant les coordonnées cylindriques :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\alpha y^2}\cos\varphi \\ y \\ \sqrt{1-\alpha y^2}\sin\varphi \end{pmatrix} \ , y \in \mathbb{R},\ \varphi \in [0;2\pi] \ .$$

(2) $-2x^2 + y^2 + z^2 = \alpha$.

• Si $\alpha > 0$, on réécrit l'équation $-\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 = 1$. C'est un hyperboloïde à une nappe de révolution autour de l'axe (Ox). En écrivant $y^2 + z^2 = \left(\sqrt{\alpha + 2x^2}\right)^2$, une paramétrisation possible est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{\alpha+2x^2}\cos\varphi \\ \sqrt{\alpha+2x^2}\sin\varphi \end{pmatrix} \ , x \in \mathbb{R},\ \varphi \in [0;2\pi] \ .$$

• si $\alpha = 0$, on réécrit l'équation $x^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2$.C'est un cône de révolution autour de l'axe (Ox). En écrivant $y^2 + z^2 = (\sqrt{2}|x|)^2$, une paramétrisation est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{2}|x|\cos\varphi \\ \sqrt{2}|x|\sin\varphi \end{pmatrix} \ , x \in \mathbb{R} \ ,\ \varphi \in [0;2\pi] \ .$$

• Si $\alpha < 0$, on réécrit l'équation $\left(\frac{x}{\sqrt{-\frac{\alpha}{2}}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{-\alpha}}\right)^2 - \left(\frac{z}{\sqrt{-\alpha}}\right)^2 = 1$. C'est un hyperboloïde à deux nappes de révolution autour de l'axe (Ox). Une paramétrisation possible est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{\alpha + 2x^2}\cos\varphi \\ \sqrt{\alpha + 2x^2}\sin\varphi \end{pmatrix} \ , \ x \in \left] -\infty; -\sqrt{-\frac{\alpha}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{-\frac{\alpha}{2}}; +\infty\right[\ , \ \varphi \in [0; 2\pi] \ .$$

3. $x^2 + 2y + z^2 = 1$.
À réécrire sous la forme

$$y = \frac{1}{2} - \frac{x^2 + z^2}{2}$$

Il s'agit d'un paraboloïde de révolution d'axe (Oy), de sommet $(0, \frac{1}{2}, 0)$. Une paramétrisation est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2} - \frac{x^2+z^2}{2} \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2.$$

ou bien en utilisant l'équation implicite sous la forme

$$x^2 + z^2 = \left(\sqrt{1 - 2y}\right)^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - 2y}\cos\varphi \\ y \\ \sqrt{1 - 2y}\sin\varphi \end{pmatrix} \quad , \quad y \in]-\infty, \tfrac{1}{2}], \varphi \in [0, 2\pi[.$$

Chapitre 3. Exercice A.2.8 Courbes et intersection de surfaces de $\mathbb{R}^3$

On considère deux surfaces de $\mathbb{R}^3$ définies par les paramétrisations suivantes :

$$\mathcal{S}_1 := \left\{ M \begin{pmatrix} u + v + \frac{1}{3} \\ u - 2v + \frac{1}{3} \\ -2u + v + \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; u, v \in \mathbb{R} \right\} ,$$

$$\mathcal{S}_2 := \left\{ M \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; u, v \in \mathbb{R} \right\} .$$

1. • La surface $\mathcal{S}_1$ est un plan d'équation $x + y + z = 1$.

• La surface $\mathcal{S}_2$ est un paraboloïde de révolution autour de l'axe (Oz) d'équation $z = x^2 + y^2$.

2. A faire !