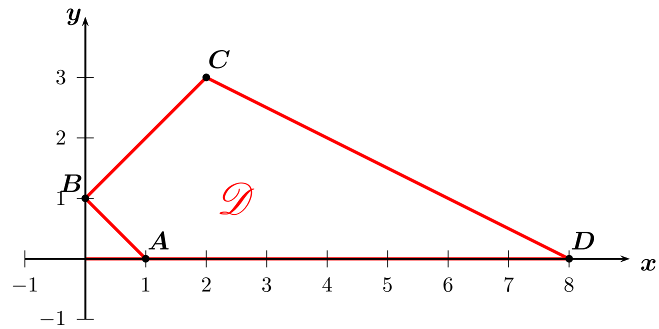
Chapitre 4. Exercice A.2.3 Théorème de Fubini

1.a)



Il s'agit de découper le polygone pour pouvoir appliquer la formule de Fubini sur chaque sous-domaine. Les équations des segments du polygone sont utiles pour définir les bornes des variables x ou y

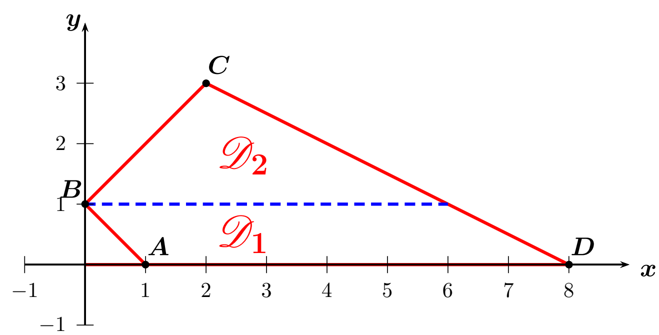
$$M(x,y) \in (AB) \Leftrightarrow y = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - y$$

$$M(x,y) \in (BC) \Leftrightarrow y = 1 + x \Leftrightarrow x = y - 1$$

$$M(x,y) \in (CD) \Leftrightarrow y = 4 - \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 8 - 2y$$

$$M(x,y) \in (AD) \Leftrightarrow y = 0$$

Méthode 1 : découpage horizontal



On a

$$\mathscr{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1 \text{ et } 1 - y \leq x \leq 8 - 2y\}$$

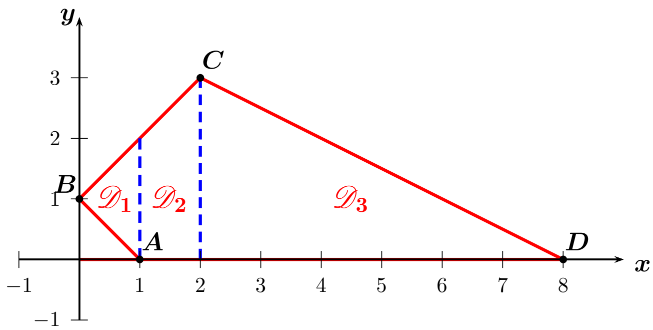
et

$$\mathscr{D}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq y \leq 3 \text{ et } y - 1 \leq x \leq 8 - 2y\}.$$

On en déduit que pour toute fonction continue et bornée sur $\mathscr{D}$ on a

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{1-y}^{8-2y} f(x,y)\,dx \right) dy + \int_1^3 \left(\int_{y-1}^{8-2y} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Méthode 2 : découpage vertical



On a

$$\mathscr{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \le x \le 1 \text{ et } 1-x \le y \le 1+x\}\ ,$$

$$\mathscr{D}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \le x \le 2 \text{ et } 0 \le y \le 1+x\}$$

et

$$\mathscr{D}_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 2 \le x \le 8 \text{ et } 0 \le y \le 4 - \tfrac{x}{2}\}$$

On en déduit que pour tout fonction continue et bornée sur $\mathscr{D}$ on a

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{1+x} f(x,y)\,dx\right) dy + \int_1^2 \left(\int_0^{1+x} f(x,y)\,dx\right) dy + \int_2^8 \left(\int_0^{4-\frac{x}{2}} f(x,y)\,dx\right) dy.$$

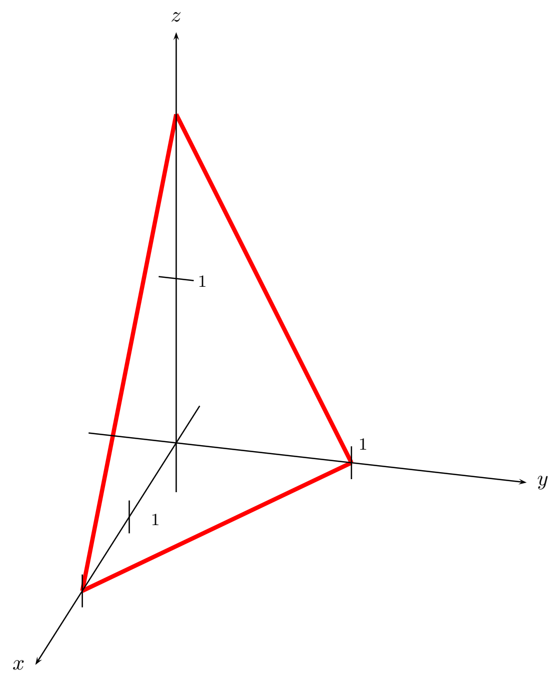
b) La distance d'un point $M(x,y)$ à l'axe des abscisses Δ est $d(M,\Delta) = |y|$. Il s'agit alors de calculer l'intégrale $\displaystyle\iint_{\mathscr{D}} y^2\,dxdy$ avec l'une ou l'autre des méthodes ci-dessus.

Privilégier la méthode 1. l'intégrand étant une fonction de $y\ldots$

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathscr{D}} y^2\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_{1-y}^{8-2y} y^2\,dx\right) dy + \int_1^3 \left(\int_{y-1}^{8-2y} y^2\,dx\right) dy \\
&= \int_0^1 y^2(7-y)dy + \int_1^3 y^2(9-3y)dy \\
&= \left[\frac{7y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 + \left[3y^3 - \frac{3y^4}{4}\right]_1^3 = \tfrac{7}{3} - \tfrac{1}{4} + \underbrace{81 - \tfrac{3}{4}\times 81}_{=\frac{81}{4}} - 3 + \tfrac{3}{4} = \tfrac{241}{12}.
\end{aligned}$$

Chapitre 4. Exercice A.2.4 Calcul de volume

Il s'agit d'un solide délimité par les plans $z = 0$ et $z = 2 - x - 2y$ en hauteur.



Pour calculer son volume, il reste à déterminer la base de ce solide, c'est à dire la projection du solide dans le plan $z = 0$.

Mathématiquement parlant, il s'agit du domaine de définition des coordonnées (x, y) des points du solide : On a

$$x \geq 0, \quad y \geq 0,$$

et

$$z \geq 0 \text{ et } z \leq 2 - x - 2y \Rightarrow 0 \leq 2 - x - 2y$$

Une figure dans le plan (xOy) permet de voir que la base $\mathscr{D}$ peut être définie par

$$\mathscr{D}\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq y \leq 1 \text{ et } 0 \leq x \leq 2 - 2y\}.$$

Le volume du solide est donc

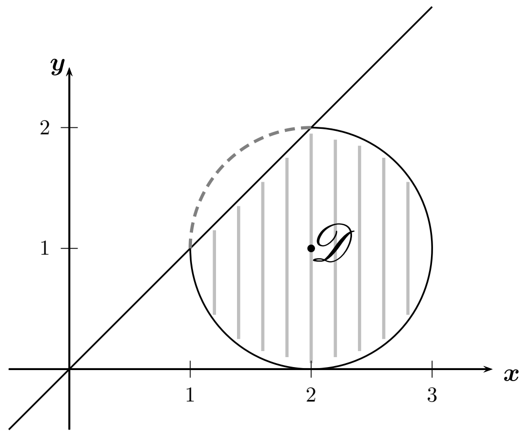
$$\begin{aligned}
\iint_{\mathscr{D}} (2 - x - 2y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{2-2y} (2 - x - 2y) dx \right) dy \\
&= \int_0^1 \left[(2 - 2y)x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{2-2y} dx \\
&= \int_0^1 \frac{(2 - 2y)^2}{2} dy \\
&= \left[-\frac{(2 - 2y)^3}{12} \right]_0^1 \\
&= \frac{8}{12} = \frac{2}{3}\,.
\end{aligned}$$

Il s'agit d'une pyramide à base triangulaire dont le volume est

$$\frac{Aire(\mathscr{D}) \times h_{max}}{3} = \frac{(\frac{2\times 1}{2}) \times 2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Chapitre 4. Exercice A.2.6 Fubini, changement de variables

1. Le domaine $\mathscr{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1\ ,\ x \geq 0\ ,\ y \leq x\}$ est un disque de centre $(2\,;1)$ et de rayon 1, tronqué par le demi-plan inférieur de frontière la droite d'équation $y = x$.



Nous avons besoin de découper le domaine en 2 sous-domaine pour appliquer le théorème de Fubini. On a

$$\begin{aligned}\mathscr{D} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2\ ,\ 1 - \sqrt{1-(x-2)^2} \leq y \leq x\} \\ &\quad \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x \leq 3\ ,\ 1 - \sqrt{1-(x-2)^2} \leq y \leq 1 + \sqrt{1-(x-2)^2}\}\,.\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_1^2 \left(\int_{1-\sqrt{1-(x-2)^2}}^{x} f(x, y)\, dy \right) dx + \int_2^3 \left(\int_{1-\sqrt{1-(x-2)^2}}^{1+\sqrt{1-(x-2)^2}} f(x, y)\, dy \right) dx\ .$$

Avec un autre découpage, on a

$$\begin{aligned}\mathscr{D} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1\ ,\ 2 - \sqrt{1-(y-1)^2} \leq x \leq 2 + \sqrt{1-(y-1)^2}\} \\ &\quad \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 2\ ,\ y \leq x \leq 2 + \sqrt{1-(y-1)^2}\}\,.\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_{2-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{2+\sqrt{1-(y-1)^2}} f(x, y)\, dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_{y}^{2+\sqrt{1-(y-1)^2}} f(x, y)\, dx \right) dy\ .$$

2. On pose $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1\ ,\ z \leq x\ ,\ z \geq 0\ ,\ y \leq x\}$ (voir figure page suivante).

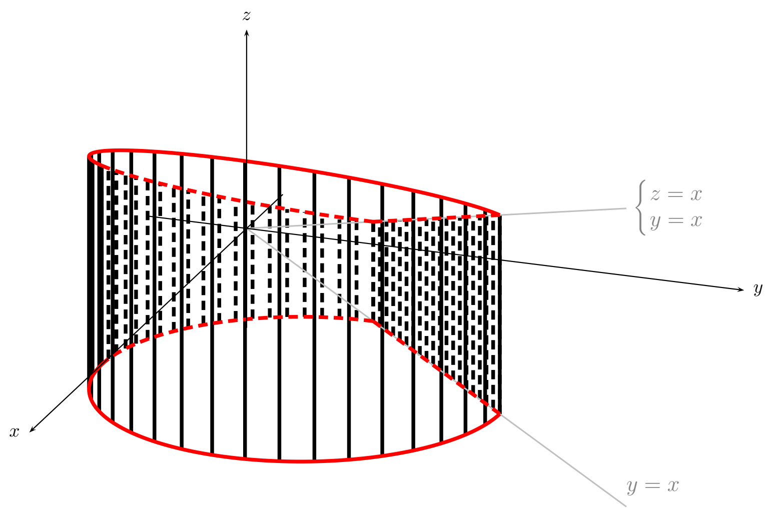
(a) La projection du volume $\mathcal{V}$ dans le plan $z = 0$ est le domaine de définition des variables (x, y). De la définition de $\mathcal{V}$, il en ressort que (x, y) satisfont les conditions suivantes

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1 \text{ et } y \leq x \tag{1}$$

et

$$0 \leq z \text{ et } z \leq x \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leq x. \tag{2}$$

Or, la condition "$0 \leq x$" est automatiquement vérifiée par les points du disque $(x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1$ donc on peut supprimer la condition (2). La projection de $\mathcal{V}$ dans le plan $z = 0$ est le domaine $\mathscr{D}$.



(b) À faire !

$$\iint_{\mathscr{D}} x\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{2-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{2+\sqrt{1-(y-1)^2}} x\,dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_y^{2+\sqrt{1-(y-1)^2}} x\,dx \right) dy$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{2-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{2+\sqrt{1-(y-1)^2}} dy + \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_y^{2+\sqrt{1-(y-1)^2}} dy$$
$$= \int_0^1 4\sqrt{1-(y-1)^2}dy + \int_1^2 \left[\frac{5-(y-1)^2-y^2}{2} + 2\sqrt{1-(y-1)^2}\right] dy$$
$$= 4\int_0^1 \sqrt{1-(y-1)^2}dy + \int_1^2 (2-y^2+y)\,dy + 2\int_1^2 \sqrt{1-(y-1)^2}\,dy$$

On effectue le changement de variable $\sin\theta = y-1$ dans la première et la troisième intégrale :

$$dy = \cos\theta\,d\theta \quad , \quad y = 0 \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} \quad , \quad y = 1 \Leftrightarrow \theta = 0 \quad , \quad y = 2 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}\,.$$

$$\iint_{\mathscr{D}} x\,dx\,dy = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2\theta\,d\theta + \left[2y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right]_1^2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta$$

Sachant que $2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$ on obtient

$$\iint_{\mathscr{D}} x\,dx\,dy = 2\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 + 4 - \frac{8}{3} + 2 - 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \pi + \frac{7}{6} + \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{7}{6} + \frac{3\pi}{2}}\,.$$

3. À faire !