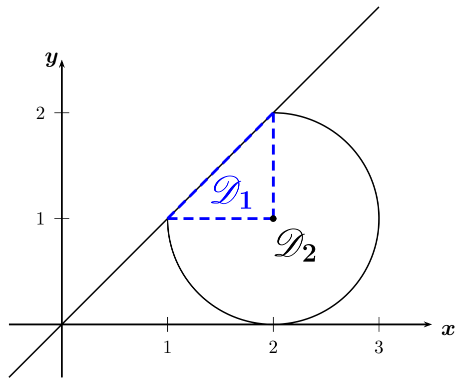
Chapitre 4. Exercice A.2.6 Fubini, changement de variables

Le domaine $\mathscr{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1\ ,\ x \geq 0\ ,\ y \leq x\}$ est un disque de centre $(2\,;1)$ et de rayon 1, tronqué par le demi-plan inférieur de frontière la droite d'équation $y = x$.

3. On définit $\mathscr{D}_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ y \geq 1,\ x \leq 2,\ y \leq x\}$ et $\mathscr{D}_2 = \mathscr{D} \backslash \mathscr{D}_1$.



(a) D'après le schéma $\mathscr{D}_2$ est le trois-quart de disque de centre $(2, 1)$ de rayon 1 paramétrable en coordonées polaires de la façon suivante :

$$\begin{cases} x = 2 + r\cos\theta \\ y = 1 + r\sin\theta \end{cases} \qquad \text{avec } \theta \in\ [-\pi, \frac{\pi}{2}] \text{ et } r \in\ [0, 1]$$

Le jacobien associé à ce changement de variable est $J = r$. En notant $\Delta = [0, 1] \times [-\pi, \frac{\pi}{2}]$, on obtient

$$\iint\limits_{\mathscr{D}_2} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{\Delta} f(2 + r\cos\theta, 1 + r\sin\theta) r\, dr\, d\theta$$

Pour $f(x, y) = x$ on a

$$\iint\limits_{\mathscr{D}_2} x\, dx\, dy = \iint\limits_{\Delta} (2 + r\cos\theta) r\, dr\, d\theta = \int_0^1 \left(\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} r(2 + r\cos\theta)\, d\theta \right) dr = \int_0^1 \left[r(2\theta + r\sin\theta) \right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} dr$$

$$= \int_0^1 r(3\pi + r) dr = \boxed{\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{3}}\,.$$

(b) Pour retrouver le volume de $\mathcal{V}$ on doit effectuer le calcul suivant

$$\iint\limits_{\mathscr{D}} x\, dx\, dy = \iint\limits_{\mathscr{D}_1} x\, dx\, dy + \iint\limits_{\mathscr{D}_2} x\, dx\, dy\ .$$

Il reste à calculer l'intérgrale sur la partie $\mathscr{D}_1$ qui est un triangle rectangle

$$\mathscr{D}_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ 1 \leq y \leq x \leq 2,\ y \leq x\}$$

On peut calculer l'intégrale sur $\mathscr{D}_1$ de deux façons différentes :

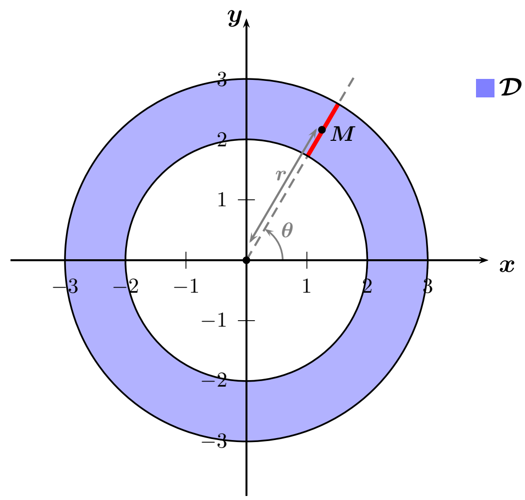
$$\iint\limits_{\mathscr{D}_1} f(x, y)\, dx\, dy = \int_1^2 \left(\int_y^2 f(x, y)\, dx \right) dy = \int_1^2 \left(\int_1^x f(x, y)\, dy \right) dx\ .$$

Pour $f(x,y)=x$, on obtient

$$\iint_{\mathscr{D}_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_1^x x\,dy\right) dx = \int_1^2 [xy]_1^x\,dx = \int_1^2 x(x-1)dx = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2$$
$$= \frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{6}}.$$

<u>Conclusion :</u> Le volume de V est $\frac{3\pi}{2}+\frac{1}{3}+\frac{5}{6}=\frac{3\pi}{2}+\frac{7}{6}$.

Chapitre 4. Exercice A.2.5 Changement de variables



On utilisant le système de coordonnées polaires, on a

$$(x, y) \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad r \in [2, 3] \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[$$

Le jacobien associé à ce changement de variable est

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta - (-r\sin^2\theta) = r.$$

On obtient

$$\boxed{\iint_{\mathscr{D}} = \iint_{[2,3]\times[0,2\pi]} r \times r\, dr d\theta = \left(\int_2^3 r^2\, dr\right) \times 2\pi = \left[\frac{r^3}{3}\right]_2^3 \times 2\pi = \frac{38}{3}\pi}.$$