Chapitre 4. Exercice A.2.1 Intégrale sur un rectangle

• On remarque que $\mathscr{D} =]-1,1[\times]0,3[$.

• On rappelle que si $f(x,y) = h(x)g(y)$ avec h et g continues et bornées sur les intervalles $]a,b[$ et $]c,d[$ respectivement, alors

$$\iint_{]a,b[\times]c,d[} f(x,y)\,dxdy = \left(\int_a^b h(x)\,dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right).$$

Ainsi avec $h(x) = x^2$ et $g(y) = 1$, on a

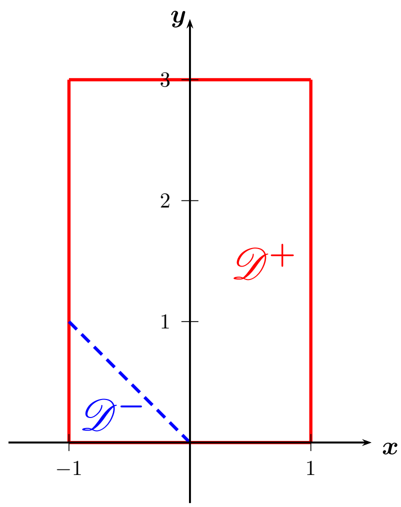
$$\boxed{I_1 = \left(\int_{-1}^1 x^2\,dx\right)\left(\int_0^3 1\,dy\right) = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 \times 3 = 3\left(\tfrac{1}{3} - (-\tfrac{1}{3})\right) = 2}.$$

Et avec $h(x) = x^2$ et $g(y) = y^3$, on a

$$\boxed{I_3 = \left(\int_{-1}^1 x^2\,dx\right)\left(\int_0^3 y^3\,dy\right) = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 \times \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^3 = \left(\tfrac{1}{3} - (-\tfrac{1}{3})\right) \times \tfrac{81}{4} = \frac{27}{2}}.$$

• Pour I_2, il faut découper le domaine $\mathscr{D}$ de la façon suivante : $\mathscr{D} = \mathscr{D}^+ \cup \mathscr{D}^-$ avec

$$\mathscr{D}^+ = \{(x,y) \in \mathscr{D}; x+y \geq 0\}, \quad \mathscr{D}^- = \{(x,y) \in \mathscr{D}; x+y < 0\} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}^+ \cap \mathscr{D}^- = \varnothing.$$



Ainsi

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathscr{D}} |x+y|\,dxdy &= \iint_{\mathscr{D}^+} |x+y|\,dxdy + \iint_{\mathscr{D}^-} |x+y|\,dxdy \\
&= \iint_{\mathscr{D}^+} (x+y)\,dxdy - \iint_{\mathscr{D}-} (x+y)\,dxdy \\
&= \left(\iint_{\mathscr{D}^+} (x+y)\,dxdy + \iint_{\mathscr{D}-} (x+y)\,dxdy\right) - \iint_{\mathscr{D}-} (x+y)\,dxdy - \iint_{\mathscr{D}-} (x+y)\,dxdy. \\
&= \iint_{\mathscr{D}} (x+y)\,dxdy - 2\iint_{\mathscr{D}-} (x+y)\,dxdy..
\end{aligned}$$

$$\iint_{\mathscr{D}} (x+y)\,dxdy = \iint_{\mathscr{D}} x\,dxdy + \iint_{\mathscr{D}} y\,dxdy = 3\int_{-1}^1 x\,dx + 2\int_0^3 y\,dy = 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1 + 2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^3 = 9$$

Le domaine $\mathscr{D}^-$ est un triangle qui se redéfini par

$$\mathscr{D}^- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; -1 < x < 0 \text{ et } 0 < y < -x\}.$$

Ainsi

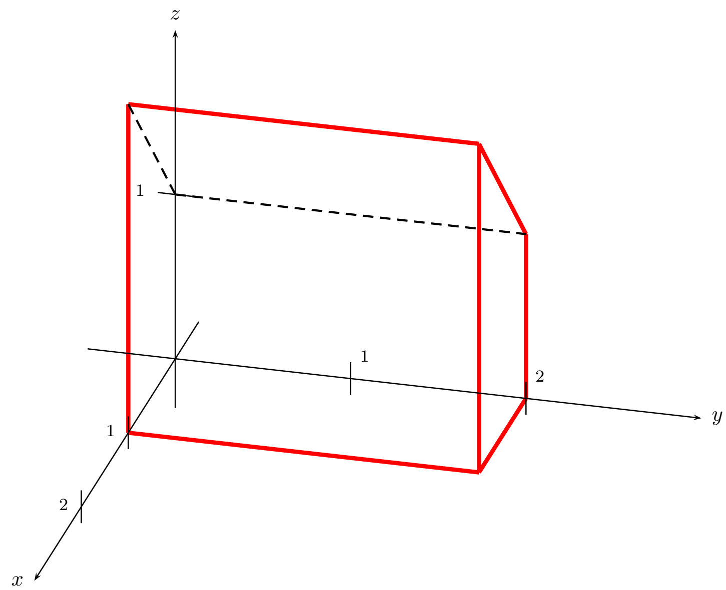
$$\iint_{\mathscr{D}^-} (x+y)\,dxdy = \int_{-1}^{0} \left(\int_{0}^{-x} (x+y)dy \right) dx = \int_{-1}^{0} \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{-x} dx = \int_{-1}^{0} -\frac{x^2}{2} dx = -\left[\frac{x^3}{6} \right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{6}$$

Finalement

$$\boxed{I_2 = 9 - 2 \times \left(-\frac{1}{6} \right) = 9 + \tfrac{1}{3}}.$$

Chapitre 4. Exercice A.2.2 Interprétation d'une intégrale double

1.



$$I_1 = \iint_{\mathscr{D}} (1+x)\,dxdy = \left(\int_0^1 (1+x)\,dx\right)\left(\int_0^2 1\,dy\right) = 2\Big[\frac{(1+x)^2}{2}\Big]_0^1 = 3.$$

Il s'agit d'un solide de base $\mathscr{D} = [0,1]\times[0,2] \subset (xOy)$ et de face supérieur d'équation $z = 1+x$. Son volume peut être calculé par la formule

$$\frac{Aire(\mathscr{D}) \times (h_{min} + h_{max})}{2} = \frac{2\times(2+1)}{2}$$

2. Il s'agit d'un solide de base $\mathscr{D} = [0,2]\times[0,1] \subset (xOy)$ et de face supérieur d'équation $z = 1+\sqrt{2y-y^2} \Leftrightarrow (y-1)^2+(z-1)^2 = 1$. Une figure permet de voir que le solide obtenu est la réunion d'un parallélépipède $[0,2]\times[0,1]\times[0,1]$ et d'un quart de cylindre d'axe $//(Ox)$, de longueur 2 et dont les sections perpendiculairement à l'axe sont des quarts de disque $((y-1)^2+(z-1)^2 \leq 1)$. Le volume du parallélépipède est $2\times 1\times 1 = 2$ et le volume du quart de cylindre est $\frac{Aire(disque)}{4} \times longueur = \frac{\pi}{4}\times 2 = \frac{\pi}{2}$.

Le volume se calcul aussi de la façon suivante :

$$\iint_{\mathscr{D}} (1+\sqrt{2y-y^2})dxdy = \iint_{\mathscr{D}} 1\,dxdy + \iint_{\mathscr{D}} \sqrt{2y-y^2}\,dxdy = \underbrace{Aire(\mathscr{D})}_{=2} + \underbrace{\left(\int_0^2 1\,dx\right)}_{=2} \times \left(\int_0^1 \sqrt{2y-y^2}dy\right).$$

Il reste à calculer :

$$\int_0^1 \sqrt{2y-y^2}dy = \int_0^1 \sqrt{1-(y-1)^2}dy$$

en utilisant le changement de variable $\boxed{y-1 = \sin\theta}$.

• On change les bornes :

$$y = 1 \Leftrightarrow \sin\theta = y-1 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$y = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = y-1 = -1 \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{2} \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

• On exprime dy en fonction de dt :

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{d[1+\sin\theta]}{d\theta} = \cos\theta \quad \Leftrightarrow dy = \cos\theta\, d\theta$$

• On transforme l'intégrand :

$$\sqrt{1-(y-1)^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta} = \cos t$$

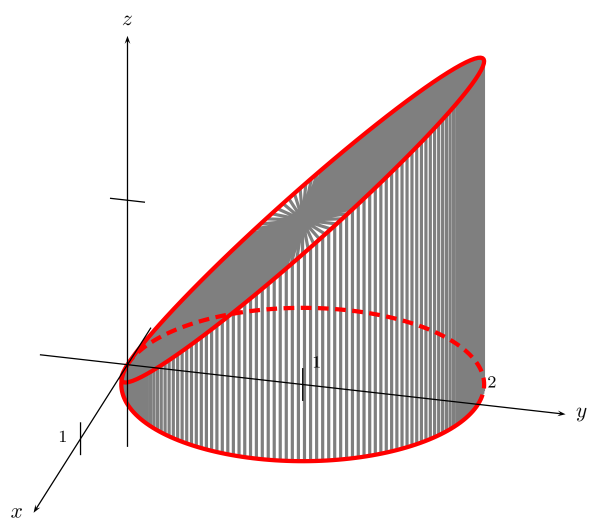
Finalement,

$$\int_0^1 \sqrt{2y-y^2}dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos\theta \times \cos\theta\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2\theta\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\, d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{\pi}{4}$$

On en déduit

$$\iint_{\mathscr{D}} (1+\sqrt{2y-y^2})dxdy = 2 + 2 \times \frac{\pi}{4} = 2 + \frac{\pi}{2}.$$

3.



Le domaine $\mathscr{D}$ est un disque. En effet,

$$x^2+y^2-2y \leq 0 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 \leq 1.$$

Une méthode astucieuse pour calculer I_3 est d'écrire

$$\begin{aligned} I_3 = \iint_{\mathscr{D}} y\, dxdy &= \iint_{\mathscr{D}} (y-1)dxdy + \iint_{\mathscr{D}} 1\, dxdy \\ &= 0 \quad + \quad Aire(\mathscr{D}) = \pi. \end{aligned}$$

La première intégrale double est nulle car le volume signé est nul pour des raisons de symétries.

La formule précédente marche encore

$$\frac{Aire(\mathscr{D}) \times (h_{min}+h_{max})}{2} = \frac{\pi \times (0+2)}{2} = \pi.$$

ou bien on applique la 2ème formule de Fubini au domaine D :

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq y \leq 2 \text{ et } -\sqrt{1-(y-1)^2} \leq x \leq \sqrt{1-(y-1)^2}\}.$$

$$\iint_{\mathscr{D}} y\,dxdy = \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} y\,dx \right) dy = \int_0^2 \left[yx \right]_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} dy = \int_0^2 2y\sqrt{1-(y-1)^2}.$$

Il faut alors effectuer un changement de variable avec sin : on pose $\boxed{y-1 = \sin t}$

• On change les bornes :

$$y = 2 \Leftrightarrow \sin t = y - 1 = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

$$y = 0 \Leftrightarrow \sin t = y - 1 = -1 \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

• On exprime dy en fonction de dt :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d[1+\sin t]}{dt} = \cos t \quad \Leftrightarrow dy = \cos t\,dt$$

• On transforme l'intégrand :

$$2y\sqrt{1-(y-1)^2} = 2(1+\sin t)\sqrt{1-\sin^2 t} = 2(1+\sin t)\sqrt{\cos^2 t} = 2(1+\sin t)\cos t$$

Finalement,

$$\iint_{\mathscr{D}} y\,dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2(1+\sin t)\cos t \times \cos t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[2\cos^2 t + 2\sin t\cos^2 t\right] dt$$

On a besoin de la linéarisation de $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$ et de la formule

$$\int u' \times u^2 = \frac{u^3}{3}$$

On conclut que

$$\iint_{\mathscr{D}} y\,dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \cos 2t - 2(-\sin t)\cos^2 t\right] dt = \left[t + \frac{\sin 2t}{2} - 2\frac{\cos^3 t}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{\pi}{2} - (-\tfrac{\pi}{2}) = \boxed{\pi}$$