**Chapitre 5. Exercice A.2.6 Fubini**

**1. Méthode des bâtons.** Il faut observer qu'il s'agit de l'intérieur du cylindre $y^2+z^2 \leq 4$ d'axe $(Ox)$, tronqué par 5 plans.
Étudions la méthode des bâtons parallèles à $(Ox)$ (car il s'agit de l'axe du cylindre).
• L'équation du cylindre indique que $0 \leq y \leq 2$ et $0 \leq z \leq 2$.
L'encadrement du bâton est donné par l'énoncé

$$x \geq 0 \quad \text{et} \quad 2-y \leq x \leq 6-2y \quad \Leftrightarrow \quad 2-y \leq x \leq 6-2y \quad (\text{ car } 2-y \geq 0).$$

• On cherche ensuite la projection du volume sur le plan $x=0$ : le domaine de définition des couples $(y,z)$ est caractérisé par

$$y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad y^2+z^2 \leq 4 \quad \text{et} \qquad \underbrace{\Big(2-y \leq 6-2y \Leftrightarrow y \leq 4\Big)}_{\text{n'apporte aucune information supplémentaire}}$$

On obtient alors la projection $D := \{(y,z) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0 \text{ et } z \geq 0 \text{ et } y^2+z^2 \leq 4\}$ sur laquelle on intègre par changement de variable en coordonnées polaires.

$$y = r\cos\theta, \quad z = r\sin\theta, \quad r \in [0,1], \quad \theta \in [0, 2\pi[ \quad \text{et } J = r.$$

Finalement

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D \left(\int_{2-y}^{6-2y} f(x,y,z)dx\right) dydz = \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{2-r\cos\theta}^{6-2r\cos\theta} rf(x, r\cos\theta, r\sin\theta)dx\right) dr\right) d\theta$$

**2.** On pose $f(x,y,z) = z = r\sin\theta$.

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{V}} z\,dxdydz &= \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{2-r\cos\theta}^{6-2r\cos\theta} r^2\sin\theta dx\right) dr\right) d\theta \\ &= \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\sin\theta(4-r\cos\theta)dr\right) d\theta \\ &= \int_0^2 \left[-4r^2\cos\theta + r^3\frac{\cos^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} dr = \int_0^2 (4r^2 - \frac{r^3}{2})dr = \left[\frac{4r^3}{3} - \frac{r^4}{8}\right]_0^2 = \frac{26}{3}\end{aligned}$$