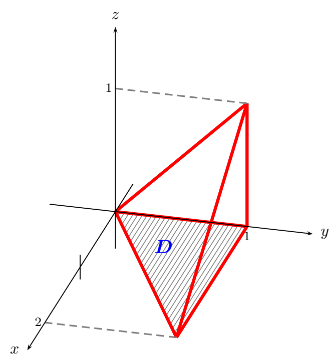
Chapitre 5. Exercice A.2.1 Fubini

1. La méthode des bâtons consiste à déterminer la projection du volume dans l'un des trois plans $(x = 0)$, ou $(y = 0)$ ou $(z = 0)$ puis de déterminer les équations des faces inférieures et supérieures selon les directions (Ox), (Oy) ou (Oz) respectivement .

méthode des bâtons // à (Oz) : projection sur le plan $z = 0$: cela correspond au domaine de définition des variables (x, y)

$$\boxed{x \geq 0 \quad y \leq 1} \text{ et } (z \geq 0 \text{ et } 2z \leq 2y - x) \Rightarrow \boxed{2y - x \leq 0}$$

Ceci définit la projection $D_{(z=0)} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0 \quad y \leq 1 \text{ et } 2y - x \geq 0\} = \{0 \leq x \leq 2 \text{ et } \frac{x}{2} \leq y \leq 1\}$.



Ensuite pour chaque point $(x, y) \in D_{(z=0)}$ on encadre le baton parallèle à (Oz) avec les données de l'énoncé :

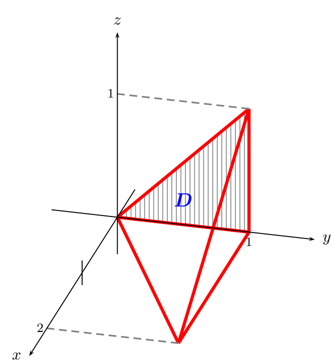
$$\boxed{0 \leq z \leq y - \frac{x}{2}}.$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z)\, dxdydz = \iint_{D_{(z=0)}} \left(\int_0^{y-\frac{x}{2}} f(x, y, z) dz \right) dydz = \int_0^2 \left(\int_{\frac{x}{2}}^1 \left(\int_0^{y-\frac{x}{2}} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

méthode des bâtons // à (Ox) : projection sur le plan $x = 0$: cela correspond au domaine de définition des variables (y, z)

$$\boxed{z \geq 0 \quad y \leq 1} \text{ et } (0 \leq x \text{ et } x \leq 2y - 2z) \Rightarrow \boxed{2y - 2z \geq 0}$$

Ceci définit la projection $D_{(x=0)} := \{(y, z) \in \mathbb{R}^2; z \geq 0 \quad y \leq 1 \text{ et } y \geq z\} = \{0 \leq y \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq y\}$.



Ensuite pour chaque point $(y, z) \in D_{(x=0)}$ on encadre le baton parallèle à (Ox) avec les données de l'énoncé :

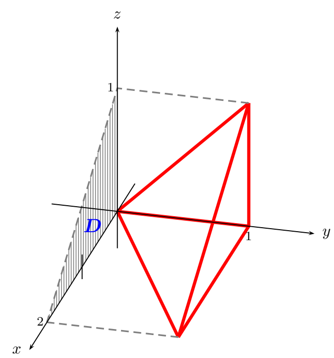
$$\boxed{0 \leq x \leq 2y - 2z}.$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{D_{(x=0)}} \left(\int_0^{2y-2z} f(x,y,z)dx\right) dydz = \int_0^1 \left(\int_0^y \left(\int_0^{2y-2z} f(x,y,z)dx\right) dz\right) dy$$

méthode des bâtons // à (Oy) : projection sur le plan $y=0$: cela correspond au domaine de définition des variables (x,z)

$$\boxed{x \geq 0 \quad z \geq 0} \text{ et } (y \leq 1 \text{ et } x + 2z \leq 2y) \Rightarrow \boxed{x + 2z \leq 2}$$

Ceci définit la projection $D_{(y=0)} := \{(x,z) \in \mathbb{R}^2; z \geq 0 \quad x \geq 0 \text{ et } x + 2z \leq 2\} = \{0 \leq z \leq 1 \text{ et } 0 \leq x \leq 2 - 2z\}$.



Ensuite pour chaque point $(x,z) \in D_{(y=0)}$ on encadre le baton parallèle à (Oy) avec les données de l'énoncé :

$$\boxed{\frac{x}{2} + z \leq y \leq 1}.$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{D_{(y=0)}} \left(\int_{\frac{x}{2}+z}^{1} f(x,y,z)dy\right) dydz = \int_0^1 \left(\int_0^{2-2z} \left(\int_{\frac{x}{2}+z}^{1} f(x,y,z)dy\right) dx\right) dz$$

$$m = \iiint_{\mathcal{V}} 1\,dxdydz = \frac{1}{3}$$

$$x_G = \frac{1}{m}\iiint_{\mathcal{V}} x\,dxdydz = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$y_G = \frac{1}{m}\iiint_{\mathcal{V}} y\,dxdydz = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$z_G = \frac{1}{m}\iiint_{\mathcal{V}} z\,dxdydz = 3 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

$$
\begin{aligned}
m = & \int_0^1 \left(\int_0^y \left(\int_0^{2y-2z} 1 dx \right) dz \right) dy \\
= & \int_0^1 \left(\int_0^y (2y-2z)\, dz \right) dy = \int_0^1 \Big[2yz - z^2 \Big]_0^y dy = \int_0^1 (2y^2 - y^2)\, dy = \int_0^1 y^2\, dy = \Big[\frac{y^3}{3} \Big]_0^1 = \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_G = 3 \int_0^1 \left(\int_0^y \left(\int_0^{2y-2z} x\, dx \right) dz \right) dy &= 3 \int_0^1 \left(\int_0^y \Big[\frac{x^2}{2} \Big]_0^{2y-2z} dz \right) dy \\
&= 3 \int_0^1 \left(\int_0^y \frac{(2y-2z)^2}{2} dz \right) dy \\
&= 3 \int_0^1 \left(\int_0^y 2(y-z)^2 dz \right) dy \\
&= 3 \int_0^1 \Big[-\frac{2(y-z)^3}{3} \Big]_0^y dy = 3 \int_0^1 \frac{2y^3}{3}\, dy = 3 \Big[\frac{2y^4}{12} \Big]_0^1 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

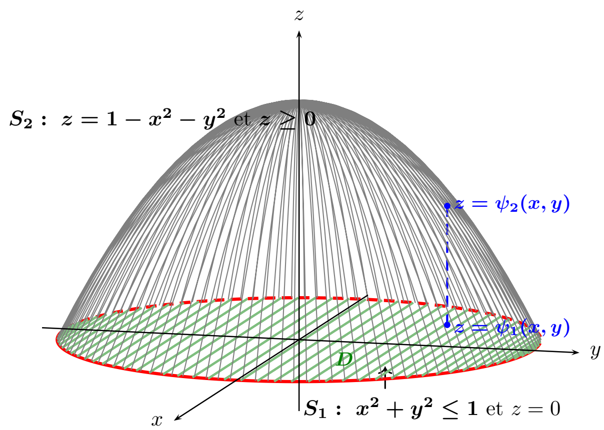
$$
\begin{aligned}
y_G = & 3 \int_0^1 \left(\int_0^y \left(\int_0^{2y-2z} y\, dx \right) dz \right) dy \\
= & 3 \int_0^1 \left(\int_0^y y(2y-2z) dz \right) dy = 3 \int_0^1 \Big[2y^2 z - yz^2) \Big]_0^y dy = 3 \int_0^1 y^3\, dy = 3 \Big[\frac{y^4}{4} \Big]_0^1 = \frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_G = & 3 \int_0^1 \left(\int_0^y \left(\int_0^{2y-2z} z\, dx \right) dz \right) dy \\
= & 3 \int_0^1 \left(\int_0^y z(2y-2z) dz \right) dy = 3 \int_0^1 \Big[yz^2 - \frac{2z^3}{3} \Big]_0^y dy = 3 \int_0^1 \frac{y^3}{3}\, dy = 3 \Big[\frac{y^4}{12} \Big]_0^1 = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Chapitre 5. Exercice A.2.2 Fubini, coordonnées cylindriques - questions 1 et 2

1. On présente la méthode des bâtons uniquement :

Méthode 1 : bâtons parallèles à (Oz).



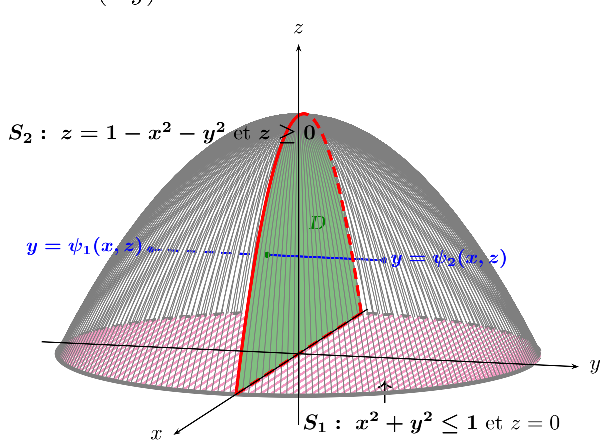
• On projète le volume sur le plan $z = 0$. Le domaine de définition des variables (x, y) est évidemment

$$0 \leq 1 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow \boxed{x^2 + y^2 \leq 1}$$

Il s'agit du disque unité D sur lequel on intègre par *changement de variable en coordonnées polaires*. L'énoncé nous donne directement l'encadrement du bâton parallèle à (Oz) : $\boxed{0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2}$.

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\,dxdydz &= \iint_{D} \left(\int_0^{1-x^2-y^2} f(x,y,z)dz \right) dxdy \\
&= \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \left(\int_0^{1-r^2} r f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)dz \right) drd\theta \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1-r^2} r f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)dz \right) d\theta \right) dr
\end{aligned}$$

Méthode 2 : bâtons parallèles à (Oy).



• On projète le volume sur le plan $y = 0$. Le domaine de définition des variables (x, z) est

$$0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{0 \leq z} \text{ et } y^2 \leq 1 - x^2 - z.$$

Or, on sait que $y^2 \geq 0$ donc on en déduit

$$0 \leq 1 - x^2 - z \quad \Rightarrow \boxed{z \leq 1 - x^2}$$

Il s'agit du domaine D sur lequel on intègre en appliquant l'une ou l'autre des formules de Fubini :

$$D := \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ -1 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1 - x^2\}.$$

En suite on encadre le bâton parallèle à (Oz) : $\boxed{-\sqrt{1-x^2-z} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-z}}$.

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\, dxdydz &= \iint_D \left(\int_{-\sqrt{1-x^2-z}}^{\sqrt{1-x^2-z}} f(x,y,z) dz \right) dxdy \\ &= \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{1-x^2} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2-z}}^{\sqrt{1-x^2-z}} f(x,y,z) dy \right) dz \right) dx\end{aligned}$$

Méthode 3 : tranches perpendiculaires à (Oz) : on observe que le volume est une superposition de disques (appelés tranches) d'équation $\boxed{x^2 + y^2 = 1 - z}$ pour z fixé.
Pour $0 \leq z \leq 1$, on note $D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; x^2 + y^2 = 1 - z\}$. La méthode des tranches consiste à superposer des intégrales surfaciques sur D_z :

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\, dxdydz = \int_0^1 \left(\iint_{D_z} f(x,y,z) dxdy \right) dz$$

Comme la géométrie de D_z est un disque de rayon $\sqrt{1-z}$ on utilise un changement de variable en coordonnées polaires :

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad r \in [0, \sqrt{1-z}] \text{ et } J = r$$

donc

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\, dxdydz &= \int_0^1 \left(\iint_{[0,\sqrt{1-z}]\times[0,2\pi]} r f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) dr d\theta \right) dz \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-z}} \left(\int_0^{2\pi} r f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) d\theta \right) dr \right) dz\end{aligned}$$

2. On pose $f(x, y, z) = 1$. Le volume est

$$V = \iiint_{\mathcal{V}} 1\, dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1-r^2} r dz \right) d\theta \right) dr = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (r - r^3) d\theta \right) dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

ou bien

$$V = \iiint_{\mathcal{V}} 1\, dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-z}} \left(\int_0^{2\pi} r d\theta \right) dr \right) dz = 2\pi \int_0^1 \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-z}} dz = 2\pi \left[-\frac{(1-z)^2}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$