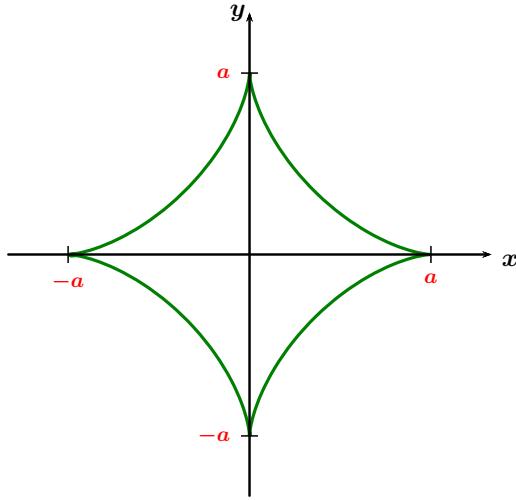


Chapitre 6. Exercice A.2.2 Question (1)



La courbe ci-dessous est entièrement parcourue en considérant $u \in [0, 2\pi[$. Pour des raisons de symétries d'axes (Ox) et (Oy), la longueur de la courbe est

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2} du = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2} du$$

Calculons

$$\begin{aligned} (x'(u))^2 + (y'(u))^2 &= (-3a \sin u \cos^2 u)^2 + (3a \cos u \sin^2 u)^2 \\ &= 9a^2 (\sin^2 u \cos^4 u + \cos^2 u \sin^4 u) \\ &= 9a^2 \sin^2 u \cos^2 u \underbrace{(\cos^2 u + \sin^2 u)}_{=1} = 9a^2 \sin^2 u \cos^2 u \\ \ell &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3|a| \sin u \cos u du = 12|a| \left[\frac{\sin^2 u}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6|a| \end{aligned}$$

Chapitre 6. Exercice A.2.4

Dans cet exercice, on réécrit l'intersection sphère/plan en une intersection cylindre plan que nous savons paramétriser (cf chap 3 ex A.2.7)

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ z = 2(R - y) \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + 4(R - y)^2 = R^2 \\ z = 2(R - y) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 5y^2 - 8Ry = -3R^2 \\ z = 2(R - y) \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 5(y - \frac{4}{5}R)^2 - \frac{16}{5}R^2 = -3R^2 \\ z = 2(R - y) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 5(y - \frac{4}{5}R)^2 = \frac{1}{5}R^2 \\ z = 2(R - y) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Une paramétrisation de la cette courbe est

$$M(x, y, z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{R}{\sqrt{5}} \cos \theta \\ \frac{4}{5}R + \frac{R}{5} \sin \theta \\ 2\left(\frac{R}{5} - \frac{R}{5} \sin \theta\right) \end{pmatrix} \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[.$$

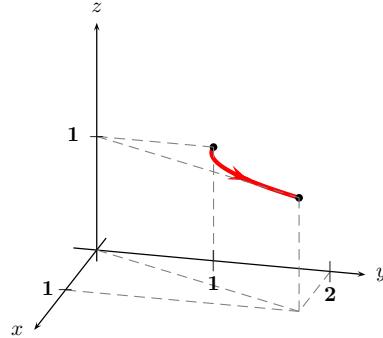
La longueur de la courbe \mathcal{C} est donc

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{R^2}{5} \sin^2 \theta + \frac{R^2}{25} \cos^2 \theta + 4 \frac{R^2}{25} \cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R}{\sqrt{5}} d\theta = \boxed{\frac{2\pi R}{\sqrt{5}}}.$$

Chapitre 6. Exercice A.2.7 Circulation

4. Dans cette question la paramétrisation de \mathcal{C} vous est déjà donnée (le paramètre est x).

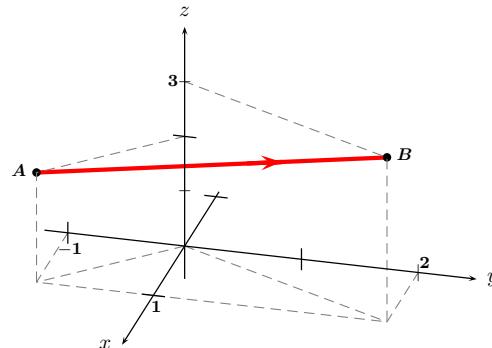
$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t^2 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{avec } 0 \leq t \leq 1.$$



Avec $V = \begin{pmatrix} x^2y \\ y^2z \\ z^2x \end{pmatrix}$ on a

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathcal{C}}(\vec{V}) &= \int_0^1 t^2(1+t^2)(1 \, dt) + (1+t^2)^2(2t \, dt) + t \times 0 \, dt \\ &= \int_0^1 [t^2 + t^4 + 2t + 4t^3 + 2t^5] \, dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + t^2 + t^4 + \frac{t^6}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + 1 + 1 + \frac{1}{3} = \frac{5+3+15+15+5}{15} = \boxed{\frac{43}{15}}. \end{aligned}$$

5. On obtient la figure suivante



Pour paramétriser un point $M(x, y, z)$ parcourant un segment $[AB]$, on a la caractérisation suivante

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \overrightarrow{AB} &\Leftrightarrow M = (1-t)A + tB, \quad \text{avec } t : 0 \rightarrow 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = (1-t) \times 1 + t \times 2 = 1 \\ y = (1-t) \times 2 + t \times (-1) = 2 - 3t \\ z = (1-t) \times 3 + t \times 2 = 3 - t \end{cases} \quad \text{avec } t : 0 \rightarrow 1 \end{aligned}$$

La direction \overrightarrow{AB} correspond au sens $t : 1 \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\mathcal{C}}(\vec{V}) &= \int_{\mathcal{C}} (y+z) dx + (x+z) dy + (x+y) dz = \int_0^1 0 + (4-t) \times (-3dt) + (3-3t) \times (-dt) \\ &= [3t^2 - 15t]_0^1 = \boxed{-12}.\end{aligned}$$

Chapitre 6. Exercice A.2.8 Green-Riemann

1. $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

• On oriente le bord \mathcal{C} de \mathcal{D} dans le sens trigonométrique. On a alors $\mathcal{C} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ où

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad t : 0 \mapsto 1.$$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}, \quad t : 1 \mapsto 0.$$

La circumnation de $\vec{V}(2y, x)$ le long de \mathcal{C} est

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{\Gamma_1} 2ydx + xdy + \int_{\Gamma_2} 2ydx + xdy \\ &= \int_0^1 2t^2 \times 1dt + t \times 2tdt + \int_1^0 2t \times 2tdt + t^2 \times 1dt \\ &= \int_0^1 4t^2 dt + \int_1^0 5t^2 dt = - \int_0^1 t^2 dt = \boxed{-\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

• La courbe \mathcal{C} étant parcourue dans le sens trigonométrique et sans point double, on peut retrouver ce résultat avec le théorème de Green-Riemann

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{D}} (-1) dx dy = - \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 1 dy \right) dx = - \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = - \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) = \boxed{-\frac{1}{3}}.$$

2. On a $x^2 + y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 1$. La courbe \mathcal{C} est donc un cercle de centre $(0, 1)$ et de rayon 1. Une paramétrisation de \mathcal{C} est donc

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 1 + \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \theta : 0 \mapsto 2\pi.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} xy^2 dy - yx^2 dx &= \int_0^{2\pi} \cos \theta (1 + \sin \theta)^2 \times \cos \theta d\theta - (1 + \sin \theta) \cos^2 \theta \times (-\sin \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta + 3 \sin \theta \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 \theta + 3 \sin \theta \cos^2 \theta + \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} + 3 \sin \theta \cos^2 \theta + \frac{1 - \cos 4\theta}{4} \right) d\theta \\ &= \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} - \frac{\cos^3 \theta}{3} + \frac{\theta}{4} - \frac{\sin 4\theta}{4} \right]_0^{2\pi} = \boxed{\frac{3\pi}{2}}. \end{aligned}$$

La courbe \mathcal{C} est le bord du disque $\mathcal{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$ parcourue dans le sens trigonométrique et sans point double. Les fonctions P et Q définies par

$$P(x, y) = -yx^2 \quad \text{et} \quad Q(x, y) = xy^2$$

étant de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{D} on a

$$\int_{\mathcal{C}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) \right) dxdy = \iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2) dxdy.$$

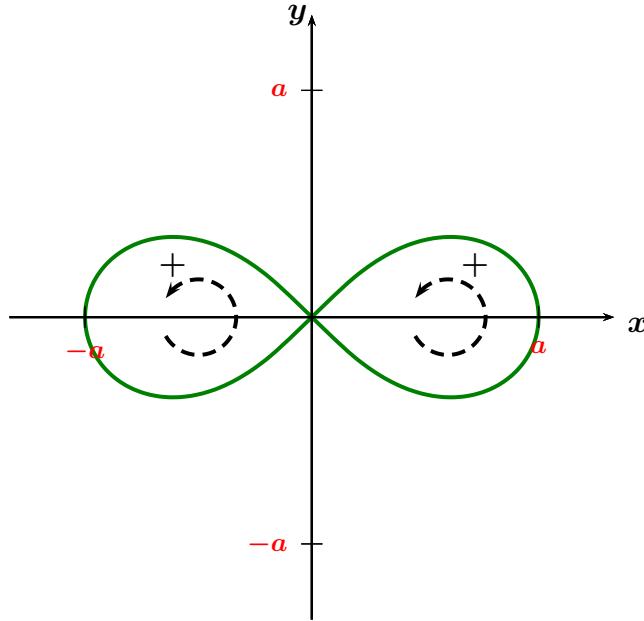
On effectue un changement de variable en coordonnées polaires

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ 1 + r \sin \theta \end{pmatrix}, \quad r \in [0, 1] \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[.$$

Le jacobien est $J_\phi = r$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} xy^2 dy - yx^2 dx &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (r^2 + 2r \sin \theta + 1) \times r \, r d\theta \right) dr \\ &= \int_0^1 r \left[(r^2 + 1)\theta - 2r \cos \theta \right]_0^{2\pi} dr = \int_0^1 2\pi(r^2 + 1) dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} \right]_0^1 = \boxed{\frac{3\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Chapitre 6. Exercice A.2.9 Question 4 - Une courbe en huit



Une courbe paramétrée en coordonnées polaires est définie par la donnée du rayon $r(\theta)$ en fonction de l'angle θ parcourant le cercle trigonométrique : on obtient alors

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\theta) \cos \theta \\ r(\theta) \sin \theta \end{pmatrix}$$

Le domaine de définition I de θ est le domaine de définition de r dans $[0, 2\pi]$. L'aire s'obtient plus facilement avec la formule

$$\text{Aire}(D) = \frac{1}{2} \int_I x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_I (r(\theta))^2 d\theta \quad (\text{à redémontrer})$$

Pour la Lemniscate de Bernouilli on a $r(\theta) = a\sqrt{\cos(2\theta)}$ avec $a > 0$ fixé. Le domaine de définition du paramètre θ est caractérisé par l'inéquation

$$\cos(2\theta) \geq 0 \iff 2\theta \bmod[2\pi] \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \iff \theta \bmod[\pi] \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}].$$

Les valeurs de $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ permettent de parcourir la boucle de droite et les valeurs de $\theta \in [\pi - \frac{\pi}{4}; \pi + \frac{\pi}{4}]$ permettent de parcourir la boucle de gauche.

Pour parcourir les deux boucles dans le sens direct, il faut faire varier θ dans le sens croissant $-\frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{4}$ puis $\pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow \pi + \frac{\pi}{4}$. Par symétrie, l'aire est alors obtenue par la formule

$$\text{Aire}(D) = \frac{1}{2} \times 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (a\sqrt{\cos(2\theta)})^2 d\theta = a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta = a^2 \left[\frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

Chapitre 6. Exercice A.2.11 Sur les hypothèses du théorème de Green-Riemann

1. La paramétrisation de Γ parcourue dans le sens trigonométrique est

$$\begin{cases} x &= \cos \theta \\ y &= \sin \theta \end{cases} \quad \theta : 0 \rightarrow 2\pi$$

L'équation de Γ est $x^2 + y^2 = 1$ donc

$$\int_{\Gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_{\Gamma} xdy - ydx = \int_0^{2\pi} \cos \theta \times \cos \theta d\theta - \sin \theta \times (-\sin \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi.$$

2. On remarque que la circulation que l'on vient de calculer correspond au travail de la force

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

le long de Γ . La question est : peut-on appliquer le théorème de Green-Riemann pour calculer cette circulation ?

Les hypothèses sur Γ sont bien vérifiées : c'est le bord fermé et sans point double du disque unité. La circulation a été calculée en respectant le sens trigonométrique. Il reste à vérifier les hypothèses sur P et Q . L'intégrale

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy$$

existe si l'intégrand est continu en tout point $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ (sauf sur une partie d'aire nulle) et bornée.

Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{x^2 + y^2} + (x) \times \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2} - \left(\frac{-1}{x^2 + y^2} + (-y) \times \left(\frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} \right) \right) \\ &= \frac{2}{x^2 + y^2} + \frac{-2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \mathbf{0}$$

Ce résultat est différent de la circulation calculée à la question 1. car P et Q ne sont pas continues $(0, 0) \in \mathcal{D}$, donc ne sont pas différentiables, et donc n'admettent pas des dérivées partielles continues en $(0, 0) \in \mathcal{D}$.