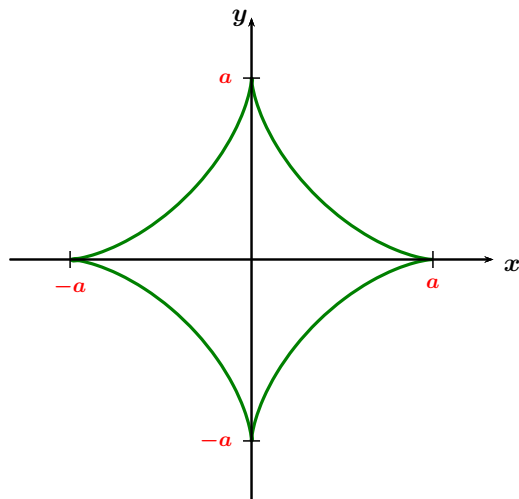


## Chapitre 6. Exercice A.2.2 Question (1)



La courbe ci-dessous est entièrement parcourue en considérant  $u \in [0, 2\pi[$ . Pour des raisons de symétries d'axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$ , la longueur de la courbe est

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2} du = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2} du$$

Calculons

$$\begin{aligned} (x'(u))^2 + (y'(u))^2 &= (-3a \sin u \cos^2 u)^2 + (3a \cos u \sin^2 u)^2 \\ &= 9a^2 (\sin^2 u \cos^4 u + \cos^2 u \sin^4 u) \\ &= 9a^2 \sin^2 u \cos^2 u \underbrace{(\cos^2 u + \sin^2 u)}_{=1} = 9a^2 \sin^2 u \cos^2 u \end{aligned}$$

$$\ell = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3|a| \sin u \cos u du = 12|a| \left[ \frac{\sin^2 u}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6|a|$$

### Chapitre 6. Exercice A.2.4

Dans cet exercice, on réécrit l'intersection sphère/plan en une intersection cylindre plan que nous savons paramétrer (cf chap 3 ex A.2.7)

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ z = 2(R - y) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 4(R - y)^2 = R^2 \\ z = 2(R - y) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5y^2 - 8Ry = -3R^2 \\ z = 2(R - y) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5(y - \frac{4}{5}R)^2 - \frac{16}{5}R^2 = -3R^2 \\ z = 2(R - y) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5(y - \frac{4}{5}R)^2 = \frac{1}{5}R^2 \\ z = 2(R - y) \end{cases} \end{aligned}$$

Une paramétrisation de la cette courbe est

$$M(x, y, z) \in \mathcal{C} \quad \Leftrightarrow \quad M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{R}{\sqrt{5}} \cos \theta \\ \frac{4}{5}R + \frac{R}{5} \sin \theta \\ 2 \left( \frac{R}{5} - \frac{R}{5} \sin \theta \right) \end{pmatrix} \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[.$$

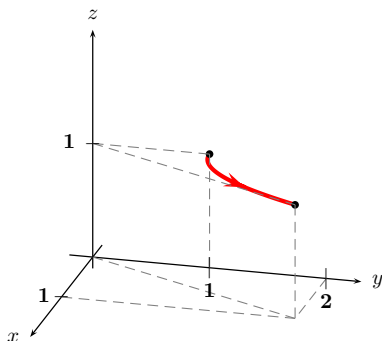
La longueur de la courbe  $\mathcal{C}$  est donc

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{R^2}{5} \sin^2 \theta + \frac{R^2}{25} \cos^2 \theta + 4 \frac{R^2}{25} \cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R}{\sqrt{5}} d\theta = \boxed{\frac{2\pi R}{\sqrt{5}}}.$$

## Chapitre 6. Exercice A.2.7 Circulation

4. Dans cette question la paramétrisation de  $\mathcal{C}$  vous est déjà donnée (le paramètre est  $x$ ).

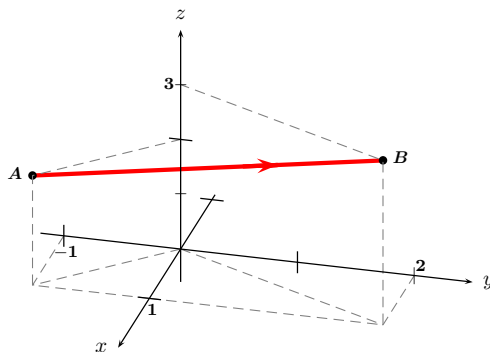
$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t^2 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{avec } 0 \leq t \leq 1.$$



Avec  $V = \begin{pmatrix} x^2 y \\ y^2 z \\ z^2 x \end{pmatrix}$  on a

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathcal{C}}(\vec{V}) &= \int_0^1 t^2(1+t^2)(1 dt) + (1+t^2)^2(2t dt) + t \times 0 dt \\ &= \int_0^1 [t^2 + t^4 + 2t + 4t^3 + 2t^5] dt \\ &= \left[ \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + t^2 + t^4 + \frac{t^6}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + 1 + 1 + \frac{1}{3} = \frac{5+3+15+15+5}{15} = \boxed{\frac{43}{15}}. \end{aligned}$$

5. On obtient la figure suivante



Pour paramétrer un point  $M(x, y, z) \in \overrightarrow{AB}$  parcourant un segment  $[AB]$ , on a la caractérisation suivante

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \overrightarrow{AB} &\Leftrightarrow M = (1-t)A + tB, \text{ avec } t : 0 \rightarrow 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = (1-t) \times 1 + t \times 2 = 1+t \\ y = (1-t) \times 1 + t \times (-1) = 1-t \\ z = (1-t) \times 3 + t \times 2 = 3-t \end{cases} \quad \text{avec } t : 0 \rightarrow 1 \end{aligned}$$

La direction  $\overrightarrow{AB}$  correspond au sens  $t : 1 \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\mathcal{C}}(\vec{V}) &= \int_{\mathcal{C}} (y+z) dx + (x+z) dy + (x+y) dz = \int_0^1 0 + (4-t) \times (-3dt) + (3-3t) \times (-dt) \\ &= \left[ 3t^2 - 15t \right]_0^1 = \boxed{-12} .\end{aligned}$$

## Chapitre 6. Exercice A.2.8 Green-Riemann

1.  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ .

• On oriente le bord  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{D}$  dans le sens trigonométrique. On a alors  $\mathcal{C} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  où

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad t : 0 \mapsto 1.$$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}, \quad t : 1 \mapsto 0.$$

La circulation de  $\vec{V}(2y, x)$  le long de  $\mathcal{C}$  est

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{\Gamma_1} 2ydx + xdy + \int_{\Gamma_2} 2ydx + xdy \\ &= \int_0^1 2t^2 \times 1dt + t \times 2tdt + \int_1^0 2t \times 2tdt + t^2 \times 1dt \\ &= \int_0^1 4t^2 dt + \int_1^0 5t^2 dt = - \int_0^1 t^2 dt = \boxed{-\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

• La courbe  $\mathcal{C}$  étant parcourue dans le sens trigonométrique et sans point double, on peut retrouver ce résultat avec le théorème de Green-Riemann

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{D}} (-1) dx dy = - \int_0^1 \left( \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 1 dy \right) dx = - \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = - \left[ \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = - \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) = \boxed{-\frac{1}{3}}.$$

2. On a  $x^2 + y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 1$ . La courbe  $\mathcal{C}$  est donc un cercle de centre  $(0, 1)$  et de rayon

1. Une paramétrisation de  $\mathcal{C}$  est donc

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 1 + \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \theta : 0 \mapsto 2\pi.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} xy^2 dy - yx^2 dx &= \int_0^{2\pi} \cos \theta (1 + \sin \theta)^2 \times \cos \theta d\theta - (1 + \sin \theta) \cos^2 \theta \times (-\sin \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta + 3 \sin \theta \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \cos^2 \theta + 3 \sin \theta \cos^2 \theta + \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + 3 \sin \theta \cos^2 \theta + \frac{1 - \cos 4\theta}{4} \right) d\theta \\ &= \left[ \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} - \frac{\cos^3 \theta}{3} + \frac{\theta}{4} - \frac{\sin 4\theta}{4} \right]_0^{2\pi} = \boxed{\frac{3\pi}{2}}. \end{aligned}$$

La courbe  $\mathcal{C}$  est le bord du disque  $\mathcal{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$  parcourue dans le sens trigonométrique et sans point double. Les fonctions  $P$  et  $Q$  définies par

$$P(x, y) = -yx^2 \quad \text{et} \quad Q(x, y) = xy^2$$

étant de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{D}$  on a

$$\int_{\mathcal{C}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2) dx dy .$$

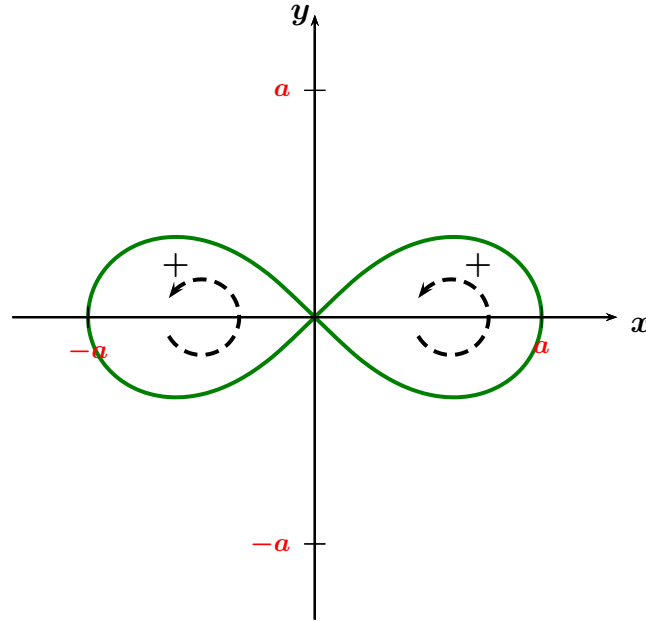
On effectue un changement de variable en coordonnées polaires

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ 1 + r \sin \theta \end{pmatrix}, \quad r \in [0, 1] \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[ .$$

Le jacobien est  $J_\phi = r$ .

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} xy^2 dy - yx^2 dx &= \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} (r^2 + 2r \sin \theta + 1) \times r \, r d\theta \right) dr \\ &= \int_0^1 r \left[ (r^2 + 1)\theta - 2r \cos \theta \right]_0^{2\pi} dr = \int_0^1 2\pi(r^2 + 1) dr = 2\pi \left[ \frac{r^3}{3} + r \right]_0^1 = \boxed{\frac{3\pi}{2}} . \end{aligned}$$

## Chapitre 6. Exercice A.2.9 Question 4 - Une courbe en huit



Une courbe paramétrée en coordonnées polaires est définie par la donnée du rayon  $r(\theta)$  en fonction de l'angle  $\theta$  parcourant le cercle trigonométrique : on obtient alors

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\theta) \cos \theta \\ r(\theta) \sin \theta \end{pmatrix}$$

Le domaine de définition  $I$  de  $\theta$  est le domaine de définition de  $r$  dans  $[0, 2\pi]$ . L'aire s'obtient plus facilement avec la formule

$$\text{Aire}(D) = \frac{1}{2} \int_I x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_I (r(\theta))^2 d\theta \quad (\text{\textcolor{red}{à redémontrer}})$$

Pour la Lemniscate de Bernoulli on a  $r(\theta) = a\sqrt{\cos(2\theta)}$  avec  $a > 0$  fixé. Le domaine de définition du paramètre  $\theta$  est caractérisé par l'inéquation

$$\cos(2\theta) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\theta \bmod[2\pi] \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \quad \Leftrightarrow \quad \theta \bmod[\pi] \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}].$$

Les valeurs de  $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  permettent de parcourir la boucle de droite et les valeurs de  $\theta \in [\pi - \frac{\pi}{4}; \pi + \frac{\pi}{4}]$  permettent de parcourir la boucle de gauche.

Pour parcourir les deux boucles dans le sens direct, il faut faire varier  $\theta$  dans le sens croissant  $-\frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{4}$  puis  $\pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow \pi + \frac{\pi}{4}$ . Par symétrie, l'aire est alors obtenue par la formule

$$\text{Aire}(D) = \frac{1}{2} \times 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (a\sqrt{\cos(2\theta)})^2 d\theta = a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta = a^2 \left[ \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

## Chapitre 6. Exercice A.2.11 Sur les hypothèses du théorème de Green-Riemann

1. La paramétrisation de  $\Gamma$  parcourue dans le sens trigonométrique est

$$\begin{cases} x &= \cos \theta \\ y &= \sin \theta \end{cases} \quad \theta : 0 \rightarrow 2\pi$$

L'équation de  $\Gamma$  est  $x^2 + y^2 = 1$  donc

$$\int_{\Gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_{\Gamma} xdy - ydx = \int_0^{2\pi} \cos \theta \times \cos \theta d\theta - \sin \theta \times (-\sin \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi.$$

2. On remarque que la circulation que l'on vient de calculer correspond au travail de la force

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

le long de  $\Gamma$ . La question est : peut-on appliquer le théorème de Green-Riemann pour calculer cette circulation ?

Les hypothèses sur  $\Gamma$  sont bien vérifiées : c'est le bord fermé et sans point double du disque unité. La circulation a été calculée en respectant le sens trigonométrique. Il reste à vérifier les hypothèses sur  $P$  et  $Q$ .

L'intégrale

$$\iint_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy$$

existe si l'intégrand est continu en tout point  $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$  (sauf sur une partie d'aire nulle) et bornée.

Pour  $(x, y) \neq (0, 0)$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{x^2 + y^2} + (x) \times \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2} - \left( \frac{-1}{x^2 + y^2} + (-y) \times \left( \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} \right) \right) \\ &= \frac{2}{x^2 + y^2} + \frac{-2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\iint_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = 0$$

Ce résultat est différent de la circulation calculée à la question 1. car  $P$  et  $Q$  ne sont pas continues  $(0, 0) \in \mathcal{D}$ , donc ne sont pas différentiables, et donc n'admettent pas des dérivées partielles continues en  $(0, 0) \in \mathcal{D}$ .