

Chapitre 6. Exercice A.1.4

À $t = 0$, le point mobile M_t est situé au pôle sud du cercle de centre $(0, R)$ et de rayon R : une paramétrisation de ce cercle est

$$\Phi_{t=0}(\theta) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R + R \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

On a alors $M_{t=0} = (0, 0) = \Phi_{t=0}(-\frac{\pi}{2})$.

Le cercle est supposé rouler sur l'axe (Ox) dans le sens croissant des abscisses x .

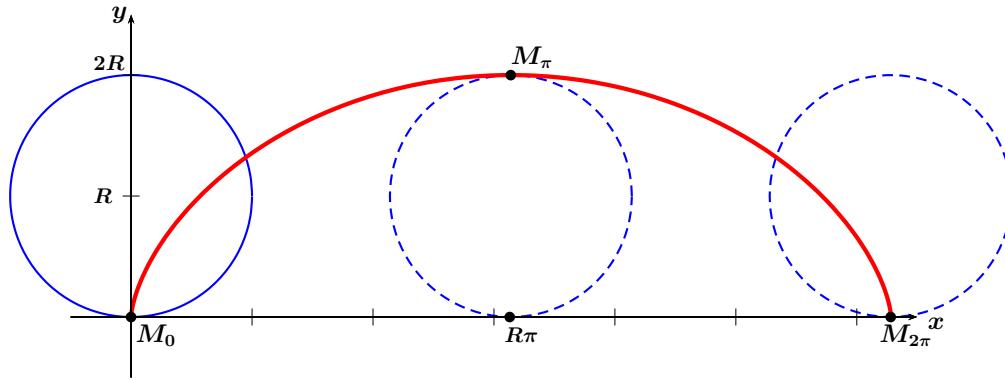
1. Le cercle tourne donc dans le sens inverse du sens trigonométrique. Après avoir tourné d'un angle $-t < 0$, en radian, le cercle s'est déplacé d'une distance Rt . Les coordonnées de son centre sont donc (Rt, R) . Une paramétrisation de ce cercle est

$$\Phi_t(\theta) = \begin{pmatrix} Rt + R \cos \theta \\ R + R \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

L'angle du point M_t sur ce cercle est $-\frac{\pi}{2} - t$ donc les coordonnées du point mobile M_t sont

$$\Phi_t(-\frac{\pi}{2} - t) = \begin{pmatrix} Rt + R \cos(\frac{\pi}{2} + t) \\ R - R \sin(\frac{\pi}{2} + t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(t - \sin t) \\ R(1 - \cos t) \end{pmatrix},$$

2. Figure de quelques arches de cycloïde



3. La longueur d'une arche est

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} R \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \int_0^\pi R \sqrt{2(1 - \cos t)} dt$$

On remarque une symétrie d'axe $x = R\pi$:

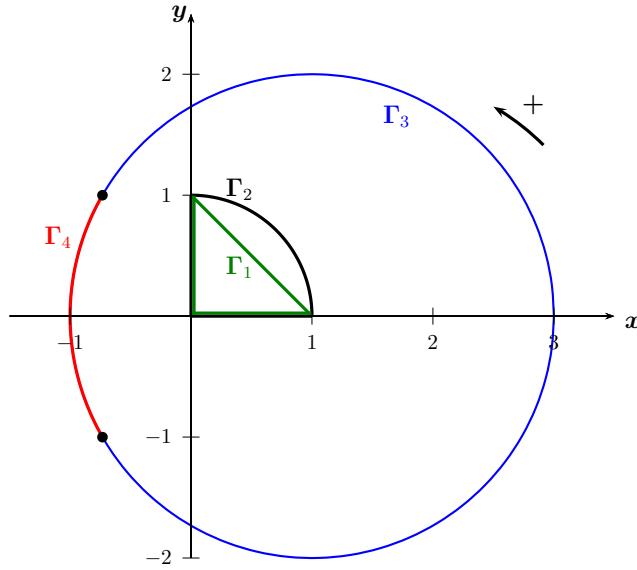
$$\ell = 2R \int_0^\pi \sqrt{2(1 - \cos t)} dt$$

On effectue un changement de variable $t = 2u \Rightarrow dt = 2du$. On utilise la relation $1 - \cos(2u) = 2 \sin^2 u$.

$$\ell = 2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 \sin^2 u} (2du) = 8R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u du = 8R \left[-\cos u \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8R.$$

Chapitre 6. Exercice A.2.5

1.



$$(a) \vec{V} = \begin{pmatrix} y \\ -x + 1 \end{pmatrix}.$$

- On a $\Gamma_1 = [OA] \cup [AB] \cup [BO]$.

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in [OA] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t : 0 \mapsto 1,$$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in [AB] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad t : 1 \mapsto 0,$$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in [BO] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad t : 1 \mapsto 0.$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \int_{[OA]} P(x, y) dx + Q(x, y) dy + \int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy + \int_{[BO]} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ &= \int_0^1 0 \times 1 dt + 1 \times 0 dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-t) \times 1 dt + (1-t) \times (-1) dt + \int_1^0 t \times 0 dt + 1 \times 1 dt \\ &= 0 + 0 + \int_1^0 1 dt = \boxed{-1}. \end{aligned}$$

- On a $\Gamma_2 = [OA] \cup \widehat{AB} \cup [BO]$.

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \widehat{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad t : 0 \mapsto \frac{\pi}{2},$$

La circulation de \vec{V} le long de Γ_1 est

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \int_{[OA]} P(x, y) dx + Q(x, y) dy + \int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy + \int_{[BO]} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ &= 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \times (-\sin \theta) d\theta + (1 - \cos \theta) \times \cos \theta d\theta - 1 \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta - 1) d\theta - 1 = \left[\sin \theta - \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 1 = (1 - \frac{\pi}{2}) - 1 = \boxed{-\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

• Γ_3 :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Gamma_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2 \cos \theta \\ 2 \sin \theta \end{pmatrix}, \quad t : 0 \mapsto 2\pi,$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \int_0^{2\pi} 2 \sin \theta \times (-2 \sin \theta) d\theta + (-2 \cos \theta) \times (2 \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -4 d\theta = \boxed{-8\pi}. \end{aligned}$$

• Γ_4 : on cherche d'abord les angles associés au point de départ et d'extrémités :

$$M(x, y) \in \Gamma_4 \text{ et } \begin{cases} x \leq 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 \cos \theta \leq 1 \\ y = 2 \sin \theta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$M(x, y) \in \Gamma_4 \text{ et } \begin{cases} x \leq 1 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 \cos \theta \leq 1 \\ y = 2 \sin \theta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{7\pi}{6}$$

On obtient la paramétrisation suivante de Γ_4 :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Gamma_4 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2 \cos \theta \\ 2 \sin \theta \end{pmatrix}, \quad t : \frac{5\pi}{6} \mapsto \frac{7\pi}{6},$$

$$\int_{\Gamma_4} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} -4 d\theta = \boxed{-\frac{4\pi}{3}}.$$

(b) Le champ de vecteur \vec{U} dérive d'un potentiel scalaire : en effet, $\vec{U} = \nabla f$ avec $f(x, y) = xy$. Les chemins Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 étant fermés, on a

$$\int_{\Gamma_1} \vec{U} \cdot d\vec{\ell} = 0 = \int_{\Gamma_2} \vec{U} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\Gamma_3} \vec{U} \cdot d\vec{\ell}$$

En ce qui concerne Γ_4 , on a le résultat

$$\int_{\Gamma_4} \vec{U} \cdot d\vec{\ell} = f \circ \Phi\left(\frac{7\pi}{6}\right) - f \circ \Phi\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \underbrace{(1 + 2 \cos \frac{7\pi}{6})(2 \sin \frac{7\pi}{6})}_{=1-\sqrt{3}} - \underbrace{(1 + 2 \cos \frac{5\pi}{6})(2 \sin \frac{5\pi}{6})}_{=1-\sqrt{3}} = \boxed{2(\sqrt{3} - 1)}.$$