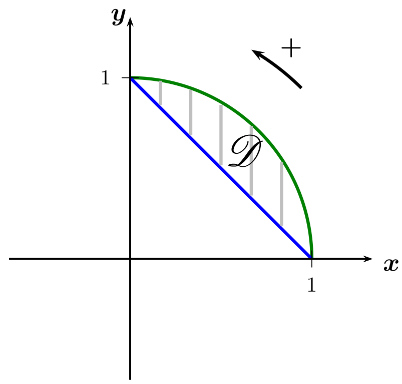
Chapitre 6. Exercice A.2.5

2. $\mathscr{D} = \{(x,y);\ x^2+y^2<1, \quad x+y>1\}$.



Le chemin vert orienté est paramétrable par

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad t : 0 \mapsto \frac{\pi}{2} \ ,$$

Le chemin bleu orienté est paramétrable par

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad t : 0 \mapsto 1 \ .$$

La circulation de $\vec{W}(y^2, -x^2)$ le long du bord orienté Γ de $\mathscr{D}$ est

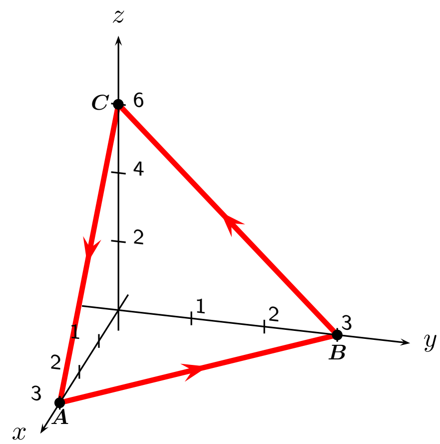
$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \vec{W}\cdot d\vec{\ell} &= \int_\Gamma y^2dx - x^2dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \times (-\sin\theta)d\theta - \cos^2\theta\times(\cos\theta)d\theta + \int_0^1 (1-t)^2\times 1dt - t^2\times(-1)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin^3\theta - \cos^3\theta)d\theta + \int_0^1 (1-2t+2t^2)dt \\
&= \Big[\cos\theta - \frac{\cos^2\theta}{3} - \sin\theta + \frac{\sin^3\theta}{3}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[t - t^2 + \frac{2t^3}{3}\Big]_0^1 \\
&= (-1+\frac{1}{3}) - (1-\frac{1}{3}) + 1 - 1 + \frac{2}{3} = \boxed{-\frac{2}{3}}.
\end{aligned}$$

La courbe Γ étant parcourue dans le sens trigonométrique et sans point double, n peut retrouver ce résultat avec le théorème de Green-Riemann

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \vec{W}\cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathscr{D}} -2(x+y)dxdy &= -2\int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\theta + r\sin\theta)rdr\right)d\theta + 2\int_0^1 \left(\int_0^{1-x}(x+y)dy\right)dx \\
&= -2\int_0^1 r^2\Big[\sin\theta - \cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}dr + 2\int_0^1 \Big[xy + \frac{y^2}{2}\Big]_0^{1-x}dx \\
&= -2\int_0^1 2r^2 + 2\int_0^1 \left(x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2}\right)dx \\
&= -4\Big[\frac{r^3}{3}\Big]_0^1 + 2\Big[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{(1-x)^3}{6}\Big]_0^1 \\
&= -\frac{4}{3} + 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \boxed{-\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

Chapitre 6. Exercice A.2.7 Circulation

1.



On paramétrise les trois côtés du triangle $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ de la façon suivante :

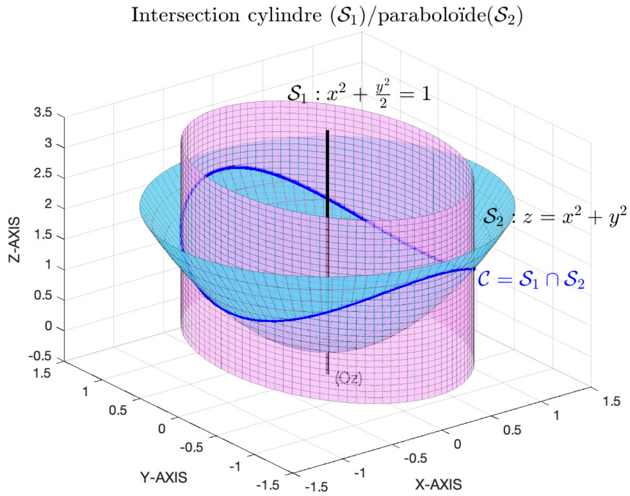
$$\begin{aligned}
M(x,y,z)\in[AB] \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, t\in[0,1]\ ,\quad M = A + t\,\overrightarrow{AB}\ ,\\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, t\in[0,1]\ ,\quad M = (1-t)A + tB\ ,\ (\text{car } \overrightarrow{AB} = B-A)\\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, t\in[0,1]\ ,\ \left\{\begin{array}{rcl} x &=& (1-t)\times 3 + t\times 0 = 3(1-t)\\ y &=& (1-t)\times 0 + t\times 3 = 3t\\ z &=& (1-t)\times 0 + t\times 0 = 0\ \Rightarrow\ dz = 0\end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(x,y,z)\in[BC] \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, t\in[0,1]\ ,\quad M = (1-t)\,B + tC\ ,\\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, t\in[0,1]\ ,\ \left\{\begin{array}{rcl} x &=& (1-t)\times 0 + t\times 0 = 0 \Rightarrow\ dx = 0\\ y &=& (1-t)\times 3 + t\times 0 = 3(1-t)\\ z &=& (1-t)\times 0 + t\times 6 = 6t\end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(x,y,z)\in[CA] \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, t\in[0,1]\ ,\quad M = (1-t)\,C + tA\ ,\\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, t\in[0,1]\ ,\ \left\{\begin{array}{rcl} x &=& (1-t)\times 0 + t\times 3 = 3t\\ y &=& (1-t)\times 0 + t\times 0 = 0\\ z &=& (1-t)\times 6 + t\times 0 = 6(1-t)\end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\mathscr{C}}(\vec{V}) &= \int_{\overset{\frown}{AB}} \Big(xydx + \underbrace{xdz}_{=0}\Big) + \int_{\overset{\frown}{BC}} \underbrace{(xydx + xdz)}_{=0} + \int_{\overset{\frown}{CA}} \Big(\underbrace{xydx}_{=0} + xdz\Big)\\
&= \int_0^1 9t(1-t)\times(-3dt) + \int_0^1 3t\times(-6dt)\\
&= \Big[-\frac{27}{2}t^2 + 9t^3 - 9t^2\Big]_0^1 = \boxed{-\frac{27}{2}}\ .
\end{aligned}$$

2.



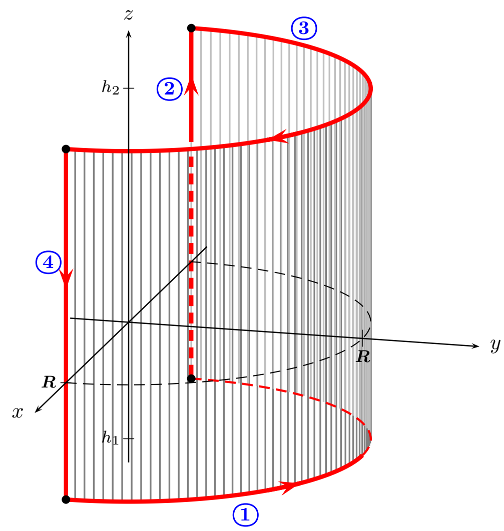
La paramétrisation de cette courbe est obtenue à la question 2 de l'exercice A.2.7 du chapitre 3. Nous avions trouvé

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & \cos\theta \\ y & = & \sqrt{2}\sin\theta \\ z & = & \cos^2\theta + 2\sin^2\theta = 1 + \sin^2\theta \end{array}\right. \qquad \text{avec } \theta \in [0, 2\pi] \ .$$

Avec $V = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathscr{C}}(\vec{V}) &= \int_0^{2\pi} 1(-\sin\theta)\, d\theta + (\cos\theta)(\sqrt{2}\cos\theta)\, d\theta + 1(2\cos\theta\sin\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\sin\theta + \sqrt{2}\frac{\cos(2\theta)+1}{2} + 2\cos\theta\sin\theta\right] d\theta \\ &= \left[\cos\theta + \sqrt{2}\frac{\sin(2\theta)}{4} + \sqrt{2}\frac{\theta}{2} + \sin^2\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= \sqrt{2}\frac{2\pi}{2} = \sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

3.



La courbe $\mathscr{C}$ est la réunion des quatres courbes suivantes

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \Gamma_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}R\cos\theta\\R\sin\theta\\h_1\end{pmatrix}, \quad \theta : 0 \mapsto \pi\ ,$$

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \Gamma_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-R\\0\\t\end{pmatrix}, \quad t : h_1 \mapsto h_2\ ,$$

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \Gamma_3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}R\cos\theta\\R\sin\theta\\h_2\end{pmatrix}, \quad \theta : \pi \mapsto 0.$$

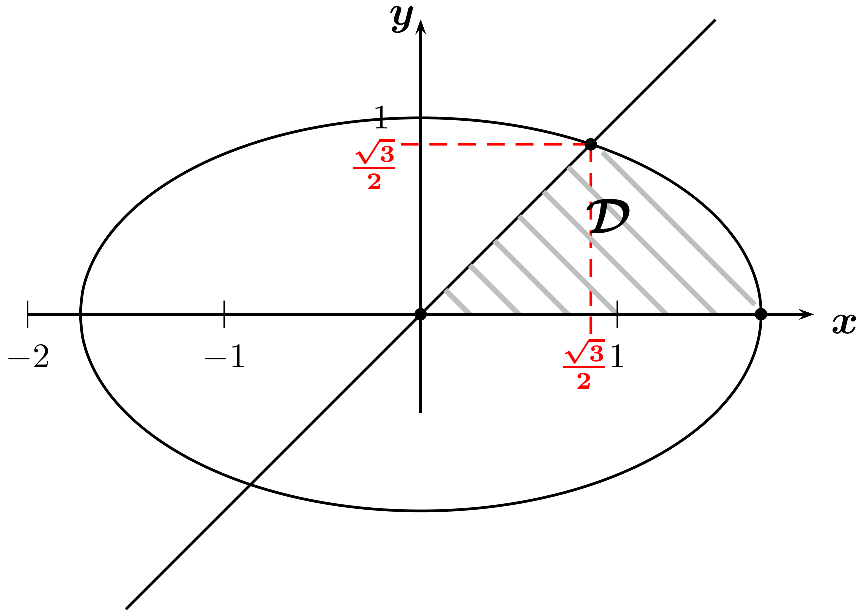
$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \Gamma_4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}R\\0\\t\end{pmatrix}, \quad t : h_2 \mapsto h_1.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\mathscr{C}}(\vec{V}) &= -\int_{\Gamma_1} ydx + zdy + xdz - \int_{\Gamma_2} ydx + zdy + xdz - \int_{\Gamma_3} ydx + zdy + xdz - \int_{\Gamma_4} ydx + zdy + xdz \\
&= \int_0^{\pi} \left[R^2\sin^2\theta - h_1 R\cos\theta\right] d\theta + \int_{h_1}^{h_2} Rdt + \int_{\pi}^{0} \left[R^2\sin^2\theta - h_2 R\cos\theta\right] d\theta - \int_{h_2}^{h_1} Rdt \\
&= R(h_2 - h_1)\int_0^{\pi} \cos\theta\ d\theta + 2\int_{h_1}^{h_2} Rdt = \boxed{2R(h_2 - h_1)}\ .
\end{aligned}$$

Chapitre 6. Exercice A.2.10 Calcul d'aire, Green-Riemann

On considère le domaine de $\mathbb{R}^2$ suivant : $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{3} + y^2 \leq 1\,,\ 0 \leq y \leq x\right\}$.



Dans cet exercice on vous demande calculer l'aire de $\mathcal{D}$ à l'aide d'une intégrale double puis de retrouver ce résultat à l'aide d'une intégrale curviligne sur le bord de $\mathcal{D}$ en utilisant le théorème de Green-Riemann.

1. Calcul de l'aire de $\mathcal{D}$

Pour calculer cette aire on peut soit utiliser le théorème de Fubini, soit utiliser un changement de variable à l'aide des coordonnées polaires.

Choix 1 : Fubini On réécrit le domaine $\mathcal{D}$ de la façon suivante

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\,,\ y \leq x \leq \sqrt{3}\sqrt{1-y^2}\right\}$$

D'où

$$\begin{aligned} Aire(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} dxdy = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\int_y^{\sqrt{3}\sqrt{1-y^2}} dx\right) dy = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (\sqrt{3}\sqrt{1-y^2} - y)dy &= \sqrt{3}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-y^2}dy - \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta\, d\theta - \frac{3}{8} \\ &= \sqrt{3}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{3}{8} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

(On a effectué le changement de variable $y = \sin\theta$)

Choix 2 : Fubini On réécrit le domaine $\mathcal{D}$ de la façon suivante

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \frac{\sqrt{3}}{2}\,,\ 0 \le y \le x\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{\sqrt{3}}{2} \le x \le \sqrt{3}\,,\ 0 \le y \le \sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\ \right\}.$$

D'où

$$\begin{aligned} Aire(\mathcal{D}) = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\int_0^x dy\right) dx + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} \left(\int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}} dy\right) dx &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x\,dx + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1-\frac{x^2}{3}}dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta \\ &= \frac{3}{8} + \sqrt{3}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

Choix 3 : Changement de variable On pose $x = \sqrt{3}r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.
- $\dfrac{x^2}{3} + y^2 \le 1 \Rightarrow 0 \le r \le 1$;
- $0 \le y \le x \Rightarrow 0 \le \sin\theta \le \sqrt{3}\cos\theta$. Vous résolvez cette inéquation sur le cercle trigonométrique.

On trouve $\theta \in \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{3}\right]$.
- Il faut calculer le jacobien de ce changement de variable : $J(r,\theta) = r\sqrt{3} \ge 0$. Finalement,

$$Aire(\mathcal{D}) = \sqrt{3}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta\right)\left(\int_0^1 r\,dr\right) = \sqrt{3} \times \frac{\pi}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} .$$

2. Application de Green-Riemann Le bord Γ de $\mathcal{D}$ est fermé et sans point double. Si on parcourt Γ dans le sens direct (i.e sens inverse des aiguilles d'une montre) on a

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy = \int_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

On rappelle que $Aire(\mathcal{D}) = \displaystyle\iint_{\mathcal{D}} 1 \times\ dxdy$. Pour exprimer l'aire de $\mathcal{D}$ en fonction d'une intégrale curviligne, il suffit de trouver deux fonctions de deux variables P et Q continûment différentiable telles que

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D},\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1 .$$

Il y a une infinité de choix possibles :
- $P(x,y) = 0$ et $Q(x,y) = x$;
- $P(x,y) = -y$ et $Q(x,y) = 0$;
- $P(x,y) = -\frac{y}{2}$ et $Q(x,y) = \frac{x}{2}$, etc...

Paramétrons le bord Γ dans le sens direct :

1) $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$, $t : 0 \to \sqrt{3}$, 2) $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$, $\theta : 0 \to \frac{\pi}{3}$, 3) $\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$, $t : \frac{\sqrt{3}}{2} \to 0$.

Utilisons le premier choix :

$$Aire(\mathcal{D}) = \int_0^{\sqrt{3}} t \times 0\,dt\ +\ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{3}\cos^2\theta\,d\theta\ +\ \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 t \times 1\,dt = \sqrt{3}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

Chapitre 6. Exercice A.2.6

1. Le champ de vecteur $\vec{V}(P(x,y),Q(x,y))$ dérive d'un potentiel scalaire si $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=0.$$

Or, pour $\vec{V}(y^2,x^2)$, on a

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=2x-2y,$$

donc $\vec{V}$ ne dérive pas d'un potentiel scalaire.

2. Une paramétrisation d'un cercle du plan s'écrit

$$(x,y)\in\mathscr{C}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+R\cos\theta\\b+R\sin\theta\end{pmatrix}\quad\text{avec } \theta\in[0,2\pi[\,.$$

On doit déterminer (a,b,R) de sorte que la circulation de $\vec{V}(y^2,x^2)$ soit nulle le long de $\mathscr{C}$.
On a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathscr{C}}\vec{V}\cdot d\vec{\ell}=\int_{\mathscr{C}}y^2dx+x^2dy &= \int_0^{2\pi}(b+R\sin\theta)^2\times(-R\sin\theta)d\theta+(a+R\cos\theta)^2\times(R\cos\theta)d\theta\\
&=\int_0^{2\pi}\big[-b^2R\sin\theta-2bR^2\sin^2\theta-R^3\sin^3\theta+a^2R\cos\theta+aR^2\cos^2\theta+R^3\cos^3\theta\big]d\theta\\
&=\Big[b^2R\cos\theta-bR^2\left(\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right)-R^3\left(-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\\
&\qquad+a^2R\sin\theta+aR^2\left(\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right)+R^3\left(\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\right)\Big]_0^{2\pi}\\
&=\boxed{R^2(a-b)}\,.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\int_{\mathscr{C}}\vec{V}\cdot d\vec{\ell}=0\quad\Leftrightarrow\quad\boxed{a=b}\,.$$