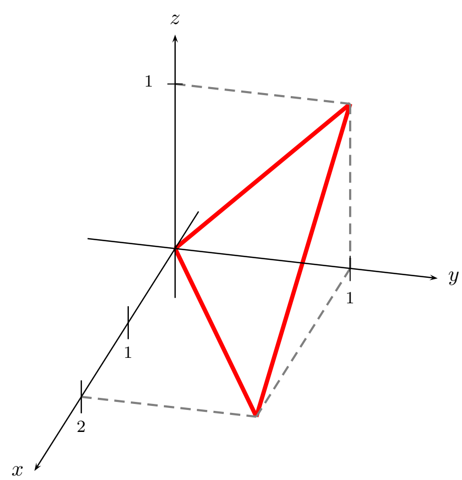
Chapitre 7. Exercice A.2.2 Aire, masse, flux

1. On a $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 2z = 0\,,\ x \geq 0\,,\ y \leq 1\,,\ z \geq 0\}$. Pour représenter cette surface dans $\mathbb{R}^3$ vous devez déterminer les intersections des plans suivants

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ x = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Ces intersections vous donnent les trois cotés (en rouge) du triangle ci-dessous.



a.

• <u>Choix 1 :</u> utilisation des paramètres x et y.
On exprime z en fonction de x et y et on cherche le domaine de définition de x et y à partir des inéquations de l'énoncé : on a

$$z = y - \frac{x}{2} := \varphi(x,y) \qquad \text{et} \ \boxed{z \geq 0 \Leftrightarrow y - \frac{x}{2} \geq 0}.$$

On obtient

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y - \frac{x}{2}\,,\ (x,y) \in D\} \quad \text{avec } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\,,\ y \leq 1\,,\ y - \frac{x}{2} \geq 0\}\,.$$

On dit que D est la projection orthogonale de Σ sur le plan (xOy) d'équation $z = 0$.

A partir de la paramétrisation $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y - \frac{x}{2} \end{pmatrix}$, on calcule le jacobien :

$$\vec{t}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{t}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{t}_x \wedge \vec{t}_y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma(x,y) = ||\vec{t}_x \wedge \vec{t}_y|| = \sqrt{(\tfrac{1}{2})^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{3}{2}.$$

L'aire de Σ est donc

$$\mathcal{A}ire(\Sigma) = \iint_\Sigma 1\, d\sigma = \iint_D \sigma(x,y) dx dy = \frac{3}{2} \iint_D 1\, dx dy = \frac{3}{2} \mathcal{A}ire(D).$$

Ici l'aire de D s'obtient facilement à l'aide dela formule $\dfrac{base \times hauteur}{2} = \dfrac{1 \times 2}{2} = 1$. Vous pouvez aussi la calculer à l'aide de Fubini :

$$\mathcal{A}ire(D) = \int_0^2 \left(\int_{\frac{x}{2}}^1 dy \right) dx = \int_0^2 (1 - \frac{x}{2}) dx = \left[x - \frac{x^2}{4} \right]_0^2 = 2 - \frac{2^2}{4} = 1\,.$$

Finalement, $\boxed{\mathcal{A}ire(\Sigma) = \frac{3}{2} \times \mathcal{A}ire(D) = \frac{3}{2}}$.

• <u>Choix 2 :</u> utilisation des paramètres x et z.
On exprime y en fonction de x et z et on cherche le domaine de définition de x et z à partir des inéquations de l'énoncé : on a

$$y = z + \frac{x}{2} := \varphi(x, z) \quad \text{ et } \boxed{y \leq 1 \Leftrightarrow z + \frac{x}{2} \leq 1}.$$

On obtient

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z + \frac{x}{2}\,,\ (x, z) \in D\} \quad \text{ avec } D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\,,\ z \geq 0\,,\ z + \frac{x}{2} \leq 1\}\ .$$

On dit que D est la projection orthogonale de Σ sur le plan d'équation $y = 1$.

A partir de la paramétrisation $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z + \frac{x}{2} \\ z \end{pmatrix}$, on calcule le jacobien :

$$\vec{t_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{t_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{t_x} \wedge \vec{t_z} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma(y, z) = ||\vec{t_x} \wedge \vec{t_z}|| = \sqrt{(\tfrac{1}{2})^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{3}{2}.$$

L'aire de Σ est donc

$$\mathcal{A}ire(\Sigma) = \iint_\Sigma 1\, d\sigma = \iint_D \sigma(x, z) dx dz = \frac{3}{2} \iint_D 1\, dx dz = \frac{3}{2} \mathcal{A}ire(D).$$

Ici l'aire de D s'obtient facilement à l'aide la formule $\dfrac{base \times hauteur}{2} = \dfrac{2 \times 1}{2} = 1$. Vous pouvez aussi la calculer à l'aide du théorème de Fubini :

$$\mathcal{A}ire(D) = \int_0^2 \left(\int_0^{1 - \frac{x}{2}} dz \right) dx = \int_0^2 (1 - \frac{x}{2}) dx = \Big[x - \frac{x^2}{4} \Big]_0^2 = 2 - \frac{2^2}{4} = 1\ .$$

Finalement, $\boxed{\mathcal{A}ire(\Sigma) = \frac{3}{2} \times \mathcal{A}ire(D) = \frac{3}{2}}$.

• <u>Choix 3 :</u> utilisation des paramètres y et z.
On exprime x en fonction de y et z et on cherche le domaine de définition de y et z à partir des inéquations de l'énoncé : on a

$$x = 2y - 2z := \varphi(y, z) \quad \text{ et } \boxed{x \geq 0 \Leftrightarrow y - z \geq 0}.$$

On obtient

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y - 2z\,,\ (y, z) \in D\} \quad \text{ avec } D = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 1\,,\ z \geq 0\,,\ y - z \geq 0\}\ .$$

On dit que D est la projection orthogonale de Σ sur le plan (yOz) d'équation $x = 0$.

A partir de la paramétrisation $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on calcule le jacobien :

$$\vec{t_y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{t_z} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{t_y} \wedge \vec{t_z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma(y, z) = ||\vec{t_y} \wedge \vec{t_z}|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3.$$

L'aire de Σ est donc

$$\mathcal{A}ire(\Sigma) = \iint_\Sigma 1\, d\sigma = \iint_D \sigma(y,z)dydz = 3\iint_D 1\, dydz = 3\mathcal{A}ire(D).$$

Ici l'aire de D s'obtient facilement à l'aide la formule $\dfrac{base \times hauteur}{2} = \dfrac{1\times 1}{2} = \dfrac{1}{2}$. Vous pouvez aussi la calculer à l'aide du théorème de Fubini :

$$\mathcal{A}ire(D) = \int_0^1 \left(\int_0^y dz\right) dy = \int_0^1 y\, dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ .$$

Finalement, $\boxed{\mathcal{A}ire(\Sigma) = 3\times \mathcal{A}ire(D) = \dfrac{3}{2}}$.

b. Étant donné la masse surfacique μ de Σ, la masse totale de Σ est donnée par la formule

$$m = \iint_\Sigma \mu\, d\sigma\ .$$

Pour le <u>choix 3</u> on obtient

$$\begin{aligned} m = \iint_D \mu(\varphi(y,z),y,z)\sigma(y,z)dydz &= \iint_D \big((2y-2z)+y+z\big)\times 3\, dydz \\ &= 3\iint_D (3y-z)\, dydz \\ &= 3\int_0^1 \left(\int_0^y (3y-z)dz\right) dy \\ &= 3\int_0^1 \frac{5}{2}y^2\, dy = 3\times\frac{5}{2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5}{2}\ . \end{aligned}$$

c. Utilisons le choix 2.

La normale qui fait un angle aigu avec l'axe (Oy) est $\overrightarrow{N} = -\vec{t}_x \wedge \vec{t}_z = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On exprime $\vec{V}$ en fonction de x et z : $\vec{V} = \begin{pmatrix} x^2+1 \\ (\frac{x}{2}+z)^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$. On a donc

$$\mathcal{F}lux_\Sigma(\vec{V}) = \iint_\Sigma \vec{V}\cdot\vec{n}\, d\sigma = \iint_D \vec{V}\cdot\overrightarrow{N}\, dxdz = \int_0^2 \left(\int_0^{1-\frac{x}{2}} (-\frac{x^2}{4} + xz - \frac{1}{2})dz\right) dx = -\frac{1}{2}\ .$$

2. Le volume $\mathcal{V}$ est un tetrahèdre dont le bord $\mathcal{S}$ est constitué des 4 faces suivantes :

• Σ : l'orientation de la normale utilisée à la question **1.c)** est bien dirigée vers l'intérieur du volume donc $\mathcal{F}lux_\Sigma(\vec{V}) = -\frac{1}{2}$.

• la face arrière $D_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=0\ ,\ z-y\le 0\ ,\ z\ge 0 \text{ et } y\le 1\} \subset (yOz)$. Dans ce cas, $d\sigma = dydz$ et un vecteur normal unitaire dirigé vers l'intérieur est $\vec{n} = (1,0,0)$. On a $\vec{V}\cdot\overrightarrow{n} = 1+x^2 = 1+0$. On trouve $\mathcal{F}lux_{D_1}(\vec{V}) = \iint_{D_1} 1\, dydz = \mathcal{A}ire(D_1) = \dfrac{1}{2}$.

• la face de droite $D_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=1\ ,\ x+2z\le 2\ ,\ z\ge 0 \text{ et } x\ge 0\} \subset (xOz)$. Dans ce cas $d\sigma = dxdz$ et le vecteur normal unitaire dirigé vers l'intérieur est $\vec{n} = (0,-1,0)$. On a $\vec{V}\cdot\overrightarrow{n} = -y^2 = -1$.

On trouve $\mathcal{Flux}_{D_2}(\vec{V}) = \displaystyle\iint_{D_2} -1\, dxdz = -\mathcal{Aire}(D_2) = -1$.

• la face d'en-dessous $D_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\ ,\ x - 2y \leq 0\ ,\ x \geq 0 \text{ et } y \leq 1\} \subset (xOy)$. Dans ce cas $d\sigma = dxdy$ et le vecteur normal unitaire dirigée vers l'intérieur est $\vec{n} = (0,0,1)$. On a $\vec{V} \cdot \overrightarrow{n} = z^2 = 0$. On trouve $\mathcal{Flux}_{D_3}(\overrightarrow{V}) = 0$.

Finalement
$$\mathcal{Flux}_{\mathcal{S}}(\vec{V}) = \mathcal{Flux}_{\Sigma}(\vec{V}) + \mathcal{Flux}_{D_1}(\vec{V}) + \mathcal{Flux}_{D_2}(\vec{V}) + \mathcal{Flux}_{D_3}(\vec{V}) = -1\ .$$

Chapitre 7. Exercice A.2.7 Flux

À faire !

On considère la surface $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2 + y^2 + R^2, h_1 \leq z \leq h_2, y \geq 0\}$.

1. On peut paramétrer Σ en coordonnées cylindriques de la façon suivante

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \\ z = z \end{array} \right. \qquad \text{avec } \varphi \in [0, \pi] \text{ and } z \in [h_1, h_2] \, .$$

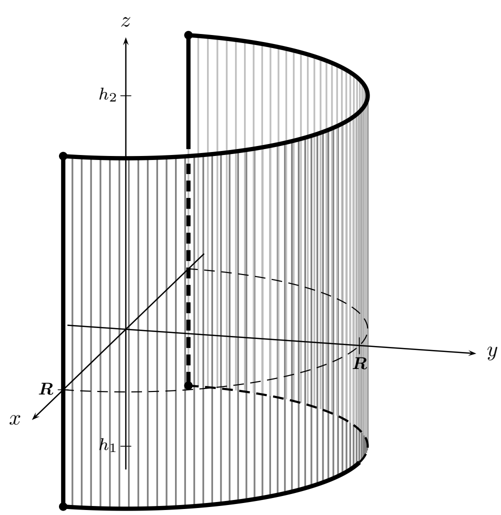
2. On calcule le jacobien $\sigma(\varphi, z) = ||\vec{T}_\varphi \wedge \vec{T}_z|| = R$. Ainsi,

$$\iint_\Sigma f(x, y, z)\, d\sigma = \iint_{[0,\pi]\times[h_1,h_2]} f(R\cos\varphi, R\sin\varphi, z) d\varphi\, dz$$

3. La projection Δ de Σ sur le plan (xOy) ne définit pas un bijection donc on ne peut pas utiliser les deux variables (x, y) pour contsruire un changement de variable de Δ sur Σ.

4. Avec $\vec{V} = (-y, -z, -x)$ on a $\mathbf{rot}\,\vec{V} = (1, 1, 1)$. En considérant le vecteur normal $\vec{N} = \vec{T}_\varphi \wedge \vec{T}_z = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0)$, le flux de $\mathrm{rot}\,\vec{V}$ à travers Σ est

$$\begin{aligned} \mathrm{Flux}_\Sigma(\mathbf{rot}\,\vec{V}) = \iint_{[0,\pi]\times[h_1,h_2]} (\mathbf{rot}\,\vec{V} \cdot \vec{N}) d\varphi\, dz &= \iint_{[0,\pi]\times[h_1,h_2]} (R\cos\varphi + R\sin\varphi) d\varphi\, dz \\ &= (h_2 - h_1) \Big[(R\sin\varphi - R\cos\varphi) \Big]_0^\pi \\ &= \boxed{2R(h_2 - h_1)}. \end{aligned}$$



1. On peut paramétrer Σ en coordonnées cylindriques de la façon suivante

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \\ z = z \end{array} \right. \qquad \text{avec } \varphi \in [0, \pi] \text{ and } z \in [h_1, h_2] \, .$$

2. On calcule le jacobien $||\vec{t}_\varphi \wedge \vec{t}_z||$.

$$\vec{t}_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \; \vec{t}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{t}_\varphi \wedge \vec{t}_z = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $||\vec{t}_\varphi \wedge \vec{t}_z|| = R$ et

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_{[0,\pi]\times[h_1,h_2]} f(R\cos\varphi, R\sin\varphi, z) \times R\,d\varphi\,dz.$$

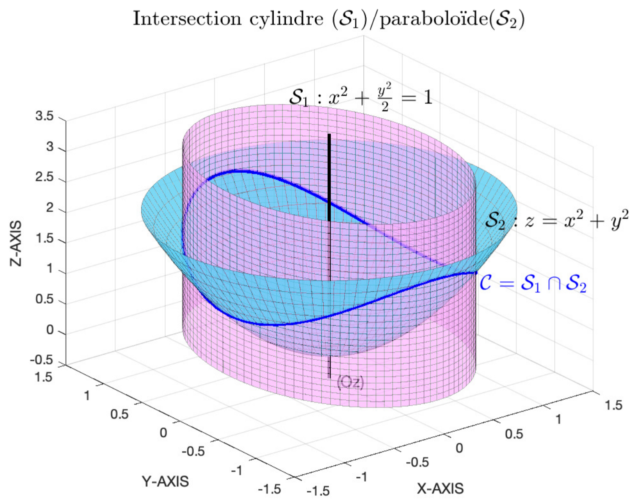
3. Non car tout simplement, on ne peut pas exprimer la variable z en fonction des paramètres (x,y). De plus, la projection orthogonale (Δ :=le demi-cercle en pointillés) de Σ sur le plan (xOy) ne définit pas une bijection donc on ne peut pas utiliser les deux variables (x,y) pour construire un changement de variable de $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ sur Σ.

4. Avec $\vec{V} = (-y,-z,-x)$ on a $\mathbf{rot}\,\vec{V} = (1,1,1)$. En considérant le vecteur normal $\vec{N} = \vec{t}_\varphi \wedge \vec{t}_z$ calculé plus haut, le flux de $\mathrm{rot}\,\vec{V}$ à travers Σ est

$$\begin{aligned}
\mathrm{Flux}_\Sigma(\mathbf{rot}\,\vec{V}) = \iint_\Sigma \underbrace{\frac{x+y}{R}}_{=\overrightarrow{rot}\vec{V}\cdot\vec{n}}\, d\sigma = \iint_{[0,\pi]\times[h_1,h_2]} (\mathbf{rot}\,\vec{V}\cdot\vec{N})d\varphi\,dz &= \iint_{[0,\pi]\times[h_1,h_2]} (\cos\varphi + \sin\varphi) \times R d\varphi\,dz \\
&= R(h_2-h_1)\Big[(R\sin\varphi - R\cos\varphi)\Big]_0^\pi \\
&= R(h_2-h_1) \times \big(-(-1)-(-1)\big) \\
&= \boxed{2R(h_2-h_1)}.
\end{aligned}$$

Chapitre 7. Exercice A.2.4 Flux

2. On considère la surface $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; z = x^2 + y^2 \text{ et } x^2 + \frac{y^2}{2} \leq 1\}$.



On peux utiliser une paramétrisation en coordonnées cylindriques

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \sqrt{2}\rho\sin\varphi \\ z = \rho^2(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi) = \rho^2(1+\sin^2\varphi) \end{cases} \qquad \text{avec } \varphi \in [0, 2\pi[\text{ et } \rho \in [0, 1].$$

On calcule le champ des normales $\vec{N} = \vec{T}_r \wedge \vec{T}_\varphi$ réalisant un angla aigu avec l'axe (Oz) :

$$\vec{T}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sqrt{2}\sin\varphi \\ 2\rho(1+\sin^2\varphi) \end{pmatrix}, \quad \vec{T}_\varphi = \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \sqrt{2}\rho\cos\varphi \\ 2\rho^2\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{N} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}\rho^2\cos\varphi \\ -4\rho^2\sin\varphi \\ \rho\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

On a

$$\vec{U} \cdot \vec{N} = \rho\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Flux}_\Sigma(\vec{V}) = \iint_{[0,2\pi[\times[0,1]} \vec{U} \cdot \vec{N} d\rho\, d\varphi = 2\pi\left[\frac{\rho^2\sqrt{2}}{2}\right]_0^1 = \boxed{\pi\sqrt{2}}.$$

On a

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ \rho^2(1+\sin^2\varphi) \end{pmatrix} \cdot \vec{N} = -8\rho^3\cos\varphi\sin\varphi + \sqrt{2}\rho^3(1+\sin^2\varphi)$$

Le flux de $\vec{V}$ à travers Σ est

$$\mathrm{Flux}_\Sigma(\vec{V}) = \iint_{[0,2\pi[\times[0,1]} \left(-8\rho^3\cos\varphi\sin\varphi + \sqrt{2}\rho^3(1+\sin^2\varphi)\right) d\rho\, d\varphi = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \times \left[4\cos^2\varphi + \sqrt{2}\left(\frac{3}{2}\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\right]_0^{2\pi}$$
$$= \boxed{\frac{3\pi\sqrt{2}}{4}}.$$