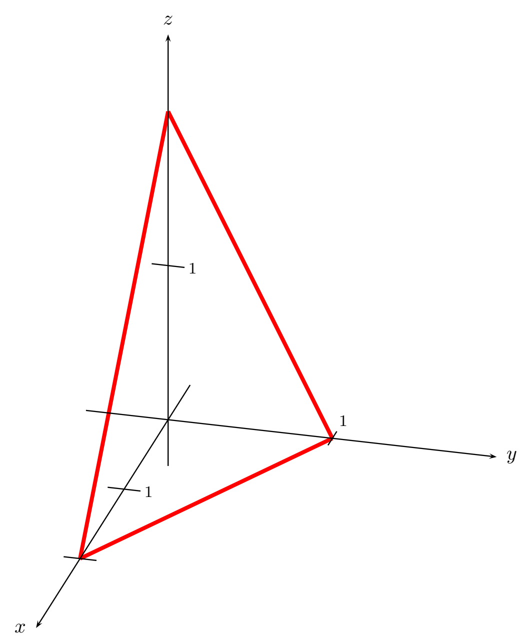
Chapitre 7. Exercice A.2.3 Intégrale surfacique, flux

1. On a $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 2\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ z \geq 0\}$. Pour représenter cette surface dans $\mathbb{R}^3$ vous devez déterminer les intersections des plans suivants

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = 2 \\ x = 0 \end{array}\right. \quad , \quad \left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = 2 \\ y = 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = 2 \\ z = 0 \end{array}\right. .$$

Ces intersections vous donnent les trois cotés (en rouge) du triangle ci-dessous.



a.

• <u>Choix 1 :</u> utilisation des paramètres x et y.
On exprime z en fonction de x et y et on cherche le domaine de définition de x et y à partir des inéquations de l'énoncé : on a

$$z = 2 - x - 2y := \varphi(x,y), \quad \text{et } \boxed{z \geq 0 \Leftrightarrow 2 - x - 2y \geq 0}.$$

On obtient

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2 - x - 2y\,,\ (x,y) \in D\} \quad \text{avec } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ x + 2y \leq 2\}\,.$$

On dit que D est la projection orthogonale de Σ sur le plan (xOy) d'équation $z = 0$.
A partir de la paramétrisation $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 - x - 2y \end{pmatrix}$, on calcule le jacobien :

$$\vec{t}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{t}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{t}_x \wedge \vec{t}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma(x,y) = ||\vec{t}_x \wedge \vec{t}_y|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

Finalement,

$$\iint_\Sigma f d\sigma = \iint_D f(x,y,\varphi(x,y))\sigma(x,y)dxdy = \sqrt{6} \iint_D f(x,y,2 - x - 2y)dxdy.$$

• <u>Choix 2 :</u> utilisation des paramètres y et z.
On exprime x en fonction de y et z et on cherche le domaine de définition de y et z à partir des inéquations de l'énoncé : on a

$$x = 2 - 2y - z := \varphi(y,z) \quad \text{et } \boxed{x \geq 0 \Leftrightarrow 2 - 2y - z \geq 0}.$$

On obtient

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2 - 2y - z\,,\ (y,z) \in D\} \quad \text{avec } D = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\,,\ z \geq 0\,,\ 2y + z \leq 2\}\ .$$

On dit que D est la projection orthogonale de Σ sur le plan (yOz) d'équation $x = 0$.
A partir de la paramétrisation $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on calcule le jacobien :

$$\vec{t_y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{t_z} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{t_y} \wedge \vec{t_z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma(y,z) = ||\vec{t_y} \wedge \vec{t_z}|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

Finalement,

$$\iint_\Sigma f d\sigma = \iint_D f(\varphi(y,z), y, z)\sigma(y,z) dydz = \sqrt{6} \iint_D f(2 - 2y - z, y, z) dydz\ .$$

• <u>Choix 3 :</u> utilisation des paramètres x et z.
On exprime y en fonction de x et z et on cherche le domaine de définition de x et z à partir des inéquations de l'énoncé : on a

$$y = 1 - \frac{x}{2} - \frac{z}{2} := \varphi(x,z) \quad \text{et } \boxed{y \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{2} - \frac{z}{2} \geq 0}.$$

On obtient

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 1 - \frac{x}{2} - \frac{z}{2}\,,\ (x,z) \in D\} \quad \text{avec } D = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\,,\ z \geq 0\,,\ x + z \leq 2\}\ .$$

On dit que D est la projection orthogonale de Σ sur le plan (xOz) d'équation $y = 0$.
A partir de la paramétrisation $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 - \frac{x}{2} - \frac{z}{2} \\ z \end{pmatrix}$, on calcule le jacobien :

$$\vec{t_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{t_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{t_x} \wedge \vec{t_z} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma(y,z) = ||\vec{t_x} \wedge \vec{t_z}|| = \sqrt{(-\tfrac{1}{2})^2 + (-1)^2 + (-\tfrac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Finalement,

$$\iint_\Sigma f\, d\sigma = \iint_D f(x, \varphi(x,z), z)\sigma(x,z) dxdz = \sqrt{\frac{3}{2}} \iint_D f(x, 1 - \tfrac{x}{2} - \tfrac{z}{2}, z) dxdz\,.$$

b. On a $\mathcal{A}ire(\Sigma) = \iint_\Sigma 1\, d\sigma$. On utilise l'un des trois choix précédents avec $f(x,y,z) = 1$ pour trouver à chaque fois $\boxed{\mathcal{A}ire(\Sigma) = \sqrt{6}}$. Utiliser le fait que $\iint_D 1\, dxdy = \mathcal{A}ire(D)$ etcalculer les aires des triangles D « à la main ».

c. On a $\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Avec le choix 1, on a

$$\mathrm{Flux}_{\Sigma}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V}) = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint_{D} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{N}\, dxdy = 4\mathcal{A}ire(D) = 4 \,.$$

2. Le bord $\mathcal{S}$ du volume $\mathcal{V}$ est constitué des quatres faces suivantes :
• Σ : On a $\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{N} = z$. Avec le choix 2, on a

$$\mathcal{F}lux_{\Sigma}(\overrightarrow{U}) = \iint_{D} z\, dydz = \int_0^1 \left(\int_0^{2-2y} zdz \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{2}(2-2y)^2 dy = \frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{6}(2-2y)^3 \Big]_0^1 = \frac{2}{3} \,.$$

• la face arrière $D_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \;,\; 2y+z \leq 2 \;,\; z \geq 0 \text{ et } y \geq 0\} \subset (yOz)$. Dans ce cas $d\sigma = dydz$ et le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur est $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a $\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{n} = 0$. On trouve $\mathcal{F}lux_{D_1}(\overrightarrow{U}) = 0$.
• la face de gauche $D_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \;,\; x+z \leq 2 \;,\; z \geq 0 \text{ et } x \geq 0\} \subset (xOz)$. Dans ce cas $d\sigma = dxdz$ et le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a $\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{n} = 0$. On trouve $\mathcal{F}lux_{D_2}(\overrightarrow{U}) = 0$.
• la face d'en-dessous $D_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \;,\; x+2y \leq 2 \;,\; x \geq 0 \text{ et } y \leq 1\} \subset (xOy)$. Dans ce cas $d\sigma = dxdy$ et le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a $\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{n} = -z = 0$ car $z = 0$. On trouve $\mathcal{F}lux_{D_3}(\overrightarrow{U}) = 0$.
Finalement

$$\mathcal{F}lux_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{U}) = \mathcal{F}lux_{\Sigma}(\overrightarrow{U}) + \mathcal{F}lux_{D_1}(\overrightarrow{U}) + \mathcal{F}lux_{D_2}(\overrightarrow{U}) + \mathcal{F}lux_{D_3}(\overrightarrow{U}) = \frac{2}{3} \,.$$

Chapitre 7. Exercice A.2.6 Intégrale surfacique, flux

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2 + y^2 = z \text{ et } 0 \leq z \leq 1$$

1. a) Nous devons paramétrer Σ par les variables x et y :

• On écrit $\boxed{z = x^2 + y^2}$.

• On cherche le domaine de définition D des variables (x, y) :

$$0 \leq z \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$$

Il s'agit du disque unité .

• Nous devons calculer le jacobien $\sigma(x, y) = ||\vec{N}||$ où $\vec{N} = \nabla g(x, y, z)$ avec $g(x, y, z) = z - x^2 - y^2$

$$\sigma(x, y) = \sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$$

• On a

$$\boxed{\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\, d\sigma = \iint_{\mathscr{D}} f(x, y, x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dx\, dy}$$

Après changement de variable en coordonnées polaire pour $(x, y) \in D$ on a

$$\boxed{\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\, d\sigma = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho^2)\sqrt{1 + 4\rho^2}\, \rho\, d\rho \right) d\theta}$$

b) Aire de Σ : on pose $f(x, y, z) = 1$

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\, d\sigma &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho\sqrt{1 + 4\rho^2}\, d\rho \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{(1 + 4\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{12} \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{(5^{\frac{3}{2}} - 1)}{12} d\theta = \frac{\pi}{6}(5^{\frac{3}{2}} - 1)\end{aligned}$$

c) Flux de $\overrightarrow{\textbf{rot}}\vec{V}$ où $\vec{V} \begin{pmatrix} 0 \\ x + z \\ z + y \end{pmatrix}$:

$$\mathcal{F}lux_{\Sigma}(\textbf{rot}\,\vec{V}) = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\textbf{rot}}\vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint_{\mathscr{D}} \overrightarrow{\textbf{rot}}\vec{V} \cdot \vec{N}\, dx\, dy$$

$$\textbf{rot}\,\vec{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{V} \cdot \vec{N} = 1$$

$$\mathcal{F}lux_{\Sigma}(\textbf{rot}\,\vec{V}) = \iint_{D} 1\, dx\, dy = \mathcal{A}Ire(D) = \pi.$$

2. Le bord du volume est composé de 2 surfaces : Σ et

$$S = \{x^2 + y^2 = 1 \text{ et } z = 1\}.$$

a) • La normale unitaire à Σ dirigée vers l'extérieur du volume a sa troisième composante négative donc $\vec{n} = -\frac{\vec{N}}{||\vec{N}||}$ où $\vec{N}$ a été déterminé à la question précédente.

• La normale unitaire à S dirigée vers l'extérieur du volume est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $d\sigma = dxdy$

b) • Flux de $\vec{U}\begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}$ à travers Σ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{Flux}_{\Sigma}(\vec{U}) &= \iint_{\mathcal{D}} -\left(1 + 4(x^2 + y^2)\right) dx\, dy \\
&= -\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (1 + 4\rho^2)\, \rho\, d\rho \right) d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{2} + \rho^4 \right]_0^1 d\theta = -\int_0^{2\pi} \frac{3}{2}\, d\theta = -3\pi\ .
\end{aligned}$$

• Flux de $\vec{U}$ à travers S :

$$\begin{aligned}
\mathcal{Flux}_S(\vec{U}) &= \iint_{\mathcal{D}} \vec{U} \cdot \vec{n}\, dx\, dy \\
&= \iint_{\mathcal{D}} 1\, dx\, dy = \mathcal{Aire}(S) = \pi\ .
\end{aligned}$$

On en déduit le flux total :

$$\mathcal{Flux}_{\mathscr{S}}(\vec{U}) = \mathcal{Flux}_S(\vec{U}) + \mathcal{Flux}_{\Sigma}(\vec{U}) = -2\pi\ .$$