Chapitre 8. Exercice A.2.1

1. Fait en TD

2. Fait en cours.

3. Fait en TD.

4. Application du théorème de Stokes-Ampère

• Flux de $\mathbf{rot}\,\overrightarrow{V}$ à travers Σ.

On commence par paramétrer Σ avec les variables x et y :

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Il reste à trouver le domaine de définition des paramètres (x, y).

$$x^2 + y^2 = z \text{ et } z \leq 3 - 2y \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 \leq 3 - 2y \quad \Rightarrow \quad x^2 + (y-1)^2 \leq 4$$

Il s'agit du disque de centre $(0, -1)$ de rayon 2 qu'on notera D.

On calcule un vecteur normal

$$N = \vec{T}_x \wedge \vec{T}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}$$

En faisant un schéma, on remarque que ce vecteur normal est dirigé vers l'intérieur du paraboloïde.

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{rot}\,\vec{V}) = \iint_\Sigma \mathbf{rot}\,\vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_D \mathbf{rot}\,\vec{V} \cdot \vec{N}\, dxdy$$

Pour calculer cette intégrale double, on effectue un changement de variable en coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = -1 + r\sin\theta \end{cases} \qquad \text{avec} \quad r \in [0, 2], \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad \text{et} \quad |J| = r$$

On calcule $\mathbf{rot}\,\vec{V} \cdot \vec{N}$ en fonction de r et θ :

$$\mathbf{rot}\,\vec{V} \cdot \vec{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} = x^2 = r^2\cos^2\theta$$

$$\begin{aligned} \Phi_\Sigma(\mathbf{rot}\,\vec{V}) = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} r(r^2\cos^2\theta)\, d\theta \right) dr = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} r^3 \tfrac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta \right) dr &= \int_0^2 r^3 \left[\tfrac{\theta}{2} + \tfrac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} dr \\ &= \int_0^2 r^3 \times \pi\, dr = \pi \left[\tfrac{r^4}{4} \right]_0^2 = \boxed{4\pi}. \end{aligned}$$

•Circulation de $\overrightarrow{V}$ sur le bord $\mathscr{C}$ de Σ.

On sait que le bord est l'intersection du paraboloïde $z = x^2 + y^2$ avec le plan $z + 2y = 3$. On peut réécrire cette intersection comme une intersection cylindre/plan plus simple à paramétrer :

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z + 2y = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 4 \\ z = 3 - 2y \end{cases}$$

Une paramétrisation de cette courbe est donc

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2\cos\theta \\ y = -1 + 2\sin\theta \\ z = 3 - (-1 + 2\sin\theta) = 4 - 2\sin\theta \end{array}\right.$$

D'après la règle du bonhomme d'Ampère, la normale intérieure est associée à une circulation dans le sens trigonométrique pour les variables (x, y) donc $\theta : 0 \to 2\pi$.

$$\mathcal{T}_{\mathscr{C}}(\vec{V}) = \int_{\mathscr{C}} dx + \frac{x^3}{3}dy + dz = \int_0^{2\pi} \left(-2\sin\theta + \frac{(2\cos\theta)^3}{3} \times (2\cos\theta) - 2\cos\theta\right) d\theta$$

On peut utiliser la linéarisation de $\cos^4\theta$:

$$\cos^4\theta = \frac{3}{8} + \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{\cos 4\theta}{8}.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathscr{C}}(\vec{V}) &= \int_0^{2\pi} \left(-2\sin\theta + \left(2 + \frac{8}{3}\cos(2\theta) + \frac{2}{3}\cos(4\theta)\right) - 2\cos\theta\right) d\theta \\ &= \left[2\cos\theta + \left(2\theta + \frac{8}{6}\sin(2\theta) + \frac{2}{12}\sin(4\theta)\right) - 2\sin\theta\right]_0^{2\pi} = \boxed{4\pi}. \end{aligned}$$

---

5. Voir corrigé du TD13.

---

6. Application du théorème de Gauss-Ostrogradski.
On considère le volume $\mathcal{V} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2\}$.
Le champ de vecteur $\vec{V}(z, x, y)$ vérifie $\operatorname{div}\vec{V} = 0$ donc

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\vec{V}(x, y, z)\, dxdydz = 0.$$

On va retrouver ce résultat à l'aide du théorème de Gauss-Ostrogradski en calculant la flux de $\vec{V}$ à travers le bord S de $\mathcal{V}$.

La surface S est composée de deux morceaux

$$\Sigma_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2 + y^2 = z - 1, (x, y) \in D\} \quad \text{où } D \text{ est le disque unité}$$

et

$$\Sigma_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \ (x, y) \in D \text{ et } z = 0\}.$$

Le flux total de $\vec{V}$ à travers S est $\text{Flux}_S(\vec{V}) = \text{Flux}_{\Sigma_1}(\vec{V}) + \text{Flux}_{\Sigma_2}(\vec{V})$.

• Flux de $\overrightarrow{V}$ à travers Σ_1.
On utilise une paramétrisation en coordonnées cylindrique :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Sigma_1 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = 1 - \rho^2 \end{array}\right. \quad \text{avec } \rho \in [0, 1], \ \varphi \in [0, 2\pi[$$

Le champ des normales est dirigés vers l'extérieur si la troisième composante est positive. Ainsi

$$\vec{T}_\rho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -2\rho \end{pmatrix}, \ \vec{T}_\varphi = \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad N = \vec{T}_\rho \wedge \vec{T}_\varphi = \begin{pmatrix} 2\rho^2\cos\varphi \\ 2\rho^2\sin\varphi \\ \rho \end{pmatrix}$$

L'intégrand est

$$\vec{V}\cdot\vec{N} = \begin{pmatrix} 1-\rho^2 \\ \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \end{pmatrix} \wedge \vec{N} = 2\rho(1-\rho^2)\cos\varphi + 2\rho^2\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\sin\varphi$$

Le flux de $\vec{V}$ à travers Σ_1 est donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Flux}_{\Sigma_1}(\vec{V}) &= \iint_{\Sigma_1} \vec{V}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi[} \Big(2\rho(1-\rho^2)\cos\varphi + 2\rho^2\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\sin\varphi\Big) d\rho d\varphi \\ &= \int_0^1 2\rho(1-\rho^2)d\rho \times \int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi + \int_0^1 \rho^2 d\rho \times \int_0^{2\pi}\sin 2\varphi\, d\varphi + \int_0^1 \rho^2\, d\rho \times \int_0^{2\pi}\sin\varphi\, d\varphi \\ &= \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \end{aligned}$$

• <u>Flux de $\overrightarrow{V}$ à travers Σ_2.</u>
Ici on utilise le chapitre 4 et calculons exactement

$$\mathrm{Flux}_{\Sigma_2}(\vec{V}) = \iint_D \vec{V}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma\ ,$$

où $\boldsymbol{n} = (0,0,-1)$ est le champ des normals unitaires à Σ_2 dirigées vers l'extérieur du volume. On a

$$\vec{V}\cdot\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{n} = -y$$

.

$$\mathrm{Flux}_{\Sigma_2}(\vec{V}) = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi[} \rho^2\sin\varphi\, d\rho d\varphi = 0.$$

• <u>Flux total.</u> Le flux total est nul.

---

7. Pour $a>0$, on considère le volume $\mathcal{V} := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ 0\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2}\}$.
Il s'agit d'une demi-sphère de rayon a fermée puisque

$$0\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2} \quad\Leftrightarrow\quad z\ge 0 \text{ et } z^2+x^2+y^2\le a^2.$$

Pour calculer une intégrale triple, on utilise une paramétrisation en coordonnées sphériques :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\mathcal{V} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \text{avec } r\in[0,a], \varphi\in[0,2\pi[\text{ et } \theta\in[0,\tfrac{\pi}{2}].$$

Le jacobien du changement de variable est $|J| = r^2\sin\theta$.
Dans ce système de coordonnées, on a pour $\vec{V}(xz^2,-z^2,y^2z)$

$$\mathrm{div}\,\vec{V}(x,y,z) = z^2+y^2 = r^2(cos^2\varphi\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

On obtient alors

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{V}(x,y,z)\, dxdydz = \iiint_{[0,a]\times[0,2\pi[\times[0,\frac{\pi}{2}[} r^4(\cos^2\varphi \sin^3\theta + \cos^2\theta\sin\theta) drd\theta d\varphi$$

$$= \frac{a^5}{5} \times \left(\left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^{2\pi} \times \left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\pi \left[\frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \boxed{\frac{4\pi a^5}{15}}.$$

On peut retrouver ce résultat à l'aide du théorème de Gauss-Ostrogradski :
Le bord S de $\mathcal{V}$ est constitué de deux morceaux de surfaces

$$\Sigma_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2+y^2+z^2 = a^2, z \geq 0\}$$

et

$$\Sigma_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \ (x,y) \in D \text{ et } z = 0\} \quad \text{où } D \text{ est le disque du plan } (xOy) \text{ de rayon } a.$$

Le flux total de $\vec{V}$ à travers S est $\text{Flux}_S(\vec{V}) = \text{Flux}_{\Sigma_1}(\vec{V}) + \text{Flux}_{\Sigma_2}(\vec{V})$.

• Flux de $\overrightarrow{V}$ à travers Σ_1.
Le champ des normales extérieures au volume est dirigé vers le haut : On a donc

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} a^2\cos\varphi\sin^2\theta \\ a^2\sin\varphi\sin^2\theta \\ a^2\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{V}\cdot\vec{N} = a^5\sin^3\theta\cos^2\theta - a^4\sin\varphi\sin^2\theta\cos^2\theta$$

Le flux de $\vec{V}$ à travers Σ_1 est donc

$$\begin{aligned}
\text{Flux}_{\Sigma_1}(\vec{V}) &= \iint_{[0,2\pi[\times[0,\frac{\pi}{2}]} \vec{V}\cdot\vec{N}\, d\varphi d\theta \\
&= a^5 \times 2\pi \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos^2\theta d\theta - a^4 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi}_{=0} \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta d\theta \\
&= a^5 \times 2\pi \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta d\theta \quad + \quad 0 \\
&= a^5 \times 2\pi \times \left[-\frac{\cos^3\theta}{3} + \frac{\cos^5\theta}{5} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = a^5 \times 2\pi \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \boxed{\frac{4\pi a^5}{15}}.
\end{aligned}$$

• Flux de $\overrightarrow{V}$ à travers Σ_2.
Puisque la surface Σ_2 est incluse dans le plan d'équation $z = 0$, le champ de vecteur $\vec{V}$ est nul. Par conséquent, le flux de $\vec{V}$ à travers Σ_2 est nul.

• Flux total. Le flux total est $\text{Flux}_S(\vec{V}) = \text{Flux}_{\Sigma_1}(\vec{V}) = \frac{4\pi a^5}{15}$.