Chapitre 8. Exercice A.2.1

Comparaison par le th. de Stokes-Ampère de Chap 7. Ex A.2.7 Q4/Chap 6. Ex A.2.7 Q3

3. Soit $\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3);\ x^2 + y^2 = R^2 \text{ et } h_1 \leq z \leq h_2 \text{ et } y \geq 0\}$. On a calculé la circulation de $\vec{V}(-y, -z, -x)$ le long du bord $\mathscr{C}$ de Σ à l'exercice A.2.7 Q3 du chapitre 6 et on a trouvé

$$\int_{\mathscr{C}} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = 2R(h_2 - h_1).$$

On a aussi calculé le flux de $\mathbf{rot}\,\vec{V}$ à travers Σ à l'exercice A.2.7 du chapitre 7 et on a trouvé

$$\mathrm{Flux}_\Sigma(\mathbf{rot}\,\vec{V}) = \iint_\Sigma \mathbf{rot}\,\vec{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = 2R(h_2 - h_1).$$

Cela se justifie par le choix du champ des normales unitaires $\vec{\boldsymbol{n}}$ ayant une seconde composante positive (càd dirigé dans le sens positif de l'axe (Oy)) qui est cohérent avec l'orientation de la courbe $\mathscr{C}$ choisie au chapitre 6 selon la règle de la main droite.

Chapitre 8. Exercice A.2.1

Application du th. de Gauss-Ostrogradski Chap 7. Ex A.2.2 Q2/Chap 5. Ex A.2.1

1. À l'exercice A.2.2 du chapitre 7, on a trouvé que le flux de $\vec{V} = (x^2+1, y^2, z^2)$ à travers le bord de $\mathcal{V}$ est égale à

$$Flux_S(\vec{V}) = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, d\sigma = -1$$

sachant que le champ des normales unitaires est dirigé vers l'intérieur du volume.

Or, dans le théorème de Gauss-Ostrogradski, le champ des normales unitaires doit être dirigé vers l'extérieur du volume. Par conséquent on doit trouver

$$Flux_S(\vec{V}) = -\iint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\, \overrightarrow{V}\, dxdydy.$$

On peut utiliser les calculs des coordonnées du centre de gravité pour calculer l'intégrale triple : On

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\, \vec{V}(x,y,z) = 2(x+y+z) \Rightarrow \iint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\, \overrightarrow{V}\, dxdydy =& \iint_{\mathcal{V}} 2(x+y+z)\, dxdydy \\
=&2\left(\iint_{\mathcal{V}} x\, dxdydy + \iint_{\mathcal{V}} y\, dxdydy + \iint_{\mathcal{V}} z\, dxdydy\right) \\
=&2 \times Vol(\mathcal{V}) \times (x_G + y_G + z_G) = 2 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Comparaison par le th. de Stokes-Ampère de Chap 7. Ex A.2.4 Q2/Chap 6. Ex A.2.7 Q2

Chap 7. Ex A.2.4 Q2. On considère la surface $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; z = x^2 + y^2 \text{ et } x^2 + \frac{y^2}{2} \leq 1\}$.
On utilise une paramétrisation en coordonnées cylindriques

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \sqrt{2}\rho\sin\varphi \\ z = \rho^2(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi) = \rho^2(1 + \sin^2\varphi) \end{cases} \qquad \text{avec } \varphi \in [0, 2\pi[\text{ et } \rho \in [0, 1].$$

On calcule le champ des normales $\vec{N} = \vec{T}_r \wedge \vec{T}_\varphi$ réalisant un angla aigu avec l'axe (Oz) :

$$\vec{T}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sqrt{2}\sin\varphi \\ 2\rho(1 + \sin^2\varphi) \end{pmatrix}, \quad \vec{T}_\varphi = \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \sqrt{2}\rho\cos\varphi \\ 2\rho^2\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{N} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}\rho^2\cos\varphi \\ -4\rho^2\sin\varphi \\ \rho\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

On a

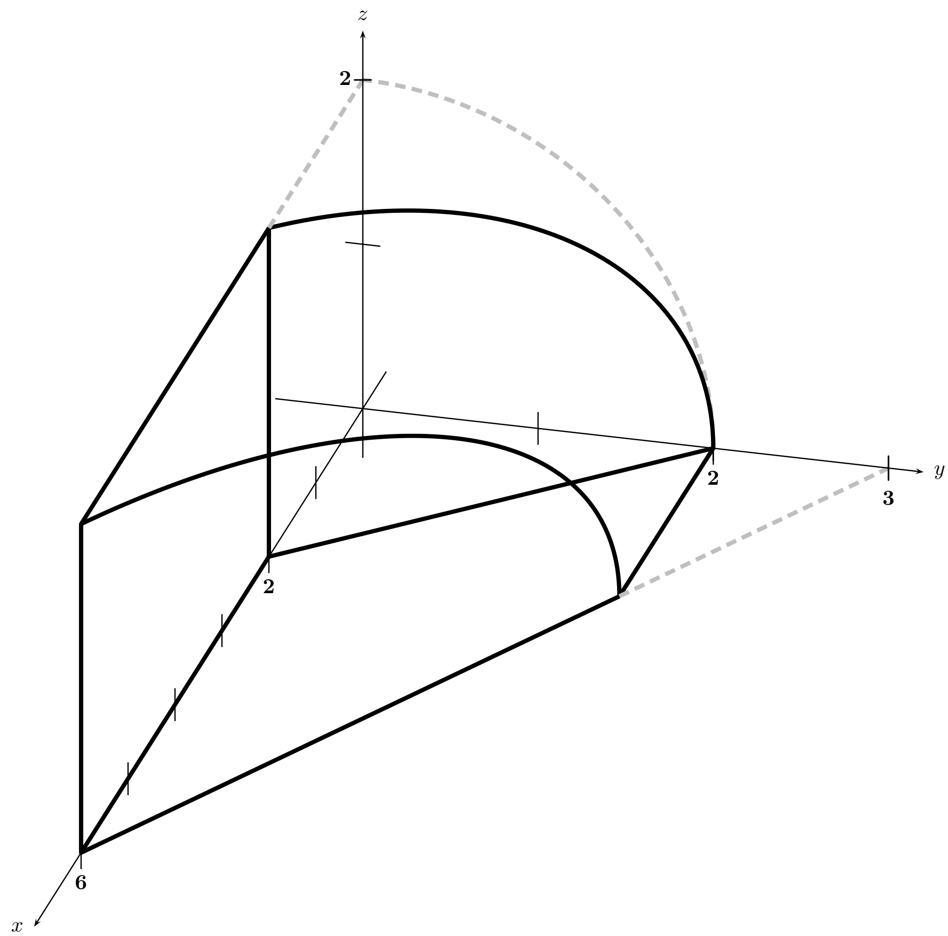
$$\vec{U} \cdot \vec{N} = \rho\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \text{Flux}_\Sigma(\vec{V}) = \iint_{[0,2\pi[\times[0,1]} \vec{U} \cdot \vec{N} d\rho \, d\varphi = 2\pi\Big[\frac{\rho^2\sqrt{2}}{2}\Big]_0^1 = \boxed{\pi\sqrt{2}}.$$

Chap 6. Ex A.2.7 Q2. Le bord de Σ est la courbe $\mathscr{C}$ étudiée à la question 2 du A.2.7 du chapitre 6. On avait trouvé

$$\int_{\mathscr{C}} \vec{V} \cdot \vec{d\ell} = \pi\sqrt{2}.$$

D'après la règle de la main droite, l'orientation du champ des normales uniraires"vers le haut" est cohérente avec l'orientation de la courbe $\mathscr{C}$ dans le sens croissant du paramètre. D'où l'égalité des résultats d'après le théorème de Stokes-Ampère.

Application du th. de Gauss-Ostrogradski au Chap 5. Ex A.2.6
Considérer plutôt $\mathcal{V} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; y^2+z^2 \leq 4,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y \geq 2,\ x+2y \leq 6\}$ et $\vec{U}(zx, zy, 1)$.
Calculer le Flux de $\vec{U}$ à travers le bord $\mathcal{S}$ de $\mathcal{V}$ de deux façons différentes avec le champ des normales unitaires dirigées vers l'extérieur de $\mathcal{V}$.



• On peut utiliser $\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{V}(x,y,z)\, dxdydz$

$$\operatorname{div} \vec{V}(x,y,z) = \frac{\partial[zx]}{\partial x} + \frac{\partial[zy]}{\partial y} + \frac{\partial[1]}{\partial z} = z + z + 0 = 2z$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{V}(x,y,z)\, dxdydz = 2\iiint_{\mathcal{V}} z\, dxdydz = 2 \times \frac{26}{3} = \frac{52}{3}.$$

• On calcule le Flux de $\vec{V}$ à travers le bord de $\mathcal{V}$ composé des 5 faces suivantes : $\mathcal{S} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup D_1 \cup D_2$.

Il y a 3 faces sur lesquelles on applique la transformation d'intégrales de surface du chapitre 7 :

$$\Sigma_1 : \begin{cases} y^2+z^2 = 4, \\ y \geq 0,\ z \geq 0 \\ x+y \geq 2,\ x+2y \leq 6 \end{cases} \qquad \Sigma_2 : \begin{cases} x+y = 2, \\ y \geq 0,\ z \geq 0, \\ y^2+z^2 \leq 4,\ x+2y \leq 6 \end{cases} \qquad \Sigma_2 : \begin{cases} x+2y = 6, \\ y \geq 0,\ z \geq 0, \\ y^2+z^2 \leq 4,\ x+y \geq 2 \end{cases}$$

Il y a 2 faces sur lesquelles on est en dimension 2, donc le chapitre 4 s'applique directement :

$$D_1 : \begin{cases} y = 0, \\ x + y \geq 2,\ z \geq 0, \\ y^2 + z^2 \leq 4,\ x + 2y \leq 6 \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} z = 0, \\ x + y \geq 2,\ y \geq 0, \\ y^2 + z^2 \leq 4,\ x + 2y \leq 6 \end{cases}$$

<u>Flux de $\vec{V}$ à travers Σ_1 :</u>

$$M \in \Sigma_1 \Leftrightarrow \quad \exists(\theta, x) \in \Delta_1,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{pmatrix}$$

Domaine de définition de (θ, z) : on utilise la paramétrisation dans les inégalités

$$\Delta_1 = \{(\theta, x) \in \mathbb{R}^2; 2\cos\theta \geq 0,\ 2\sin\theta \geq 0,\ x + 2\cos\theta \geq 2,\ x + 4\cos\theta \leq 6\}$$
$$\Delta_1 = \{(\theta, x) \in \mathbb{R}^2; \theta \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\ 2 - 2\cos\theta \leq x \leq 6 - 4\cos\theta\}.$$

Calcul du vecteur normal :

$$\vec{t}_\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sin\theta \\ -2\cos\theta \end{pmatrix}, \vec{t}_\theta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{N} = \vec{t}_\theta \wedge \vec{t}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\cos\theta \\ -2\sin\theta \end{pmatrix}$$

Un vecteur normal à Σ_1 et dirigé vers l'extérieur de $\mathcal{V}$ doit être dirigé "vers le haut" donc la 3ème composante doit être positive : on choisi

$$-\vec{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{V} \cdot (-\vec{N}) = \begin{pmatrix} 2x\sin\theta \\ 4\cos\theta\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{pmatrix} = 8\cos^2\theta\sin\theta + 2\sin\theta.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}lux_{\Sigma_1}(\vec{V}) = \iint_{\Sigma_1} \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma) &= \iint_{\Delta_1} (8\cos^2\theta\sin\theta + 2\sin\theta) d\theta dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{2-2\cos\theta}^{6-4\cos\theta} (8\cos^2\theta\sin\theta + 2\sin\theta) dx \right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(8(4 - 2\cos\theta)\cos^2\theta\sin\theta + 2(4 - 2\cos\theta)\sin\theta \right) d\theta \\ &= \left[\left(-32\frac{\cos^3\theta}{3} + 4\cos^4\theta \right) + (-8\cos\theta + 2\cos^2\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{3} - 4 + 8 - 2 = \boxed{\frac{38}{3}}. \end{aligned}$$

<u>Flux de $\vec{V}$ à travers Σ_2 :</u> sur ce plan $x + y = 2$, on choisit les paramètres (y, z) :

$$M \in \Sigma_2 \Leftrightarrow \quad \exists(y, z) \in \Delta_2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - y \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Domaine de définition de (y, z) : on utilise la paramétrisation dans les inégalités

$$\Delta_2 = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0,\ z \geq 0,\ (2 - y) + 2y + \leq 6,\ y^2 + z^2 \leq 4\}$$

Or $(2-y)+2y+\leq 6 \Leftrightarrow 2+y\leq 6 \Leftrightarrow y\leq 4$ qui est une condition inutile car $y\leq 2$.

$\Delta_2=\{(y,z)\in\mathbb{R}^2; y\geq 0,\ z\geq 0,\ y^2+z^2\leq 4\}=\left\{(y=r\cos\theta, z=r\sin\theta);\ r\in[0,2],\ \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\right\}$, et $J=abr=r$.

Calcul du vecteur normal :

$$\vec{t}_y=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{t}_z=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow \vec{N}=\vec{t}_y\wedge\vec{t}_x=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Un vecteur normal à Σ_2 et dirigé vers l'extérieur de $\mathcal{V}$ doit être dirigé selon les "x négatif" donc la 1ère composante doit être négative : on choisi

$$-\vec{N}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{V}\cdot(-\vec{N})=\begin{pmatrix}z(2-y)\\zy\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}=-z(2-y)-zy=-2z.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}lux_{\Sigma_2}(\vec{V})=\iint_{\Sigma_2}\vec{V}\cdot\vec{n}d\sigma) &= \iint_{\Delta_2}(-2z)dydz\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^2(-2r\sin\theta)dr\right)d\theta\\ &=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\right)\times\left(\int_0^2 -2r^2\,dr\right)\\ &=[-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}\times\left[-\frac{2r^3}{3}\right]_0^2=\boxed{-\frac{16}{3}}\end{aligned}$$

Flux de $\vec{V}$ à travers Σ_3 : sur ce plan $x+2y=6$, on choisit les paramètres (y,z) :

$$M\in\Sigma_3\Leftrightarrow\quad \exists(y,z)\in\Delta_3,\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-2y\\y\\z\end{pmatrix}$$

Domaine de définition de (y,z) : on utilise la paramétrisation dans les inégalités

$$\Delta_3=\{(y,z)\in\mathbb{R}^2; y\geq 0,\ z\geq 0,\ (6-2y)+y+\geq 2,\ y^2+z^2\leq 4\}$$

Or $(6-2y)+y+\geq 2\Leftrightarrow 6-y\geq 2\Leftrightarrow y\leq 4$ qui est une condition inutile car $y\leq 2$.

$\Delta_3=\{(y,z)\in\mathbb{R}^2; y\geq 0,\ z\geq 0,\ y^2+z^2\leq 4\}=\left\{(y=r\cos\theta, z=r\sin\theta);\ r\in[0,2],\ \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\right\}$, et $J=abr=r$.

Calcul du vecteur normal :

$$\vec{t}_y=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{t}_z=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow \vec{N}=\vec{t}_y\wedge\vec{t}_x=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

Un vecteur normal à Σ_2 et dirigé vers l'extérieur de $\mathcal{V}$ doit être dirigé selon les "x positif" donc la 1ère composante doit être positive : on choisi

$$+\vec{N}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{V}\cdot(+\vec{N}) = \begin{pmatrix} z(6-2y) \\ zy \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = z(6-2y) + 2zy = 6z.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}lux_{\Sigma_3}(\vec{V}) = \iint_{\Sigma_3} \vec{V}\cdot\vec{n}d\sigma) &= \iint_{\Delta_3} (6z)dydz \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 (6r\sin\theta)dr \right) d\theta \\
&= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \right) \times \left(\int_0^2 6r^2\, dr \right) \\
&= [-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \times \left[2r^3\right]_0^2 = \boxed{16}
\end{aligned}$$

Flux de $\vec{V}$ à travers $D_1 \subset (xOz)$: on doit calculer explicitement $\vec{V}\cdot\vec{n}$

Un vecteur normal unitaire $\perp$ (xOz) et dirigé vers l'extérieur est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Comme $y = 0$, on obtient

$$\vec{V}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} zx \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

D'où

$$\mathcal{F}lux_{D_1}(\vec{V}) = \boxed{0}.$$

1mm

Flux de $\vec{V}$ à travers $D_2 \subset (xOy)$: on doit calculer explicitement $\vec{V}\cdot\vec{n}$

Un vecteur normal unitaire $\perp$ (xOy) et dirigé vers l'extérieur est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Comme $z = 0$, on obtient

$$\vec{V}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1.$$

D'où

$$\mathcal{F}lux_{D_2}(\vec{V}) = \mathcal{A}ire(D_2) = -\left(\left(\frac{2\times 2}{2} \right) + \left(\frac{4\times 2}{2} \right) \right) = -(2+4) = \boxed{-6}$$

.

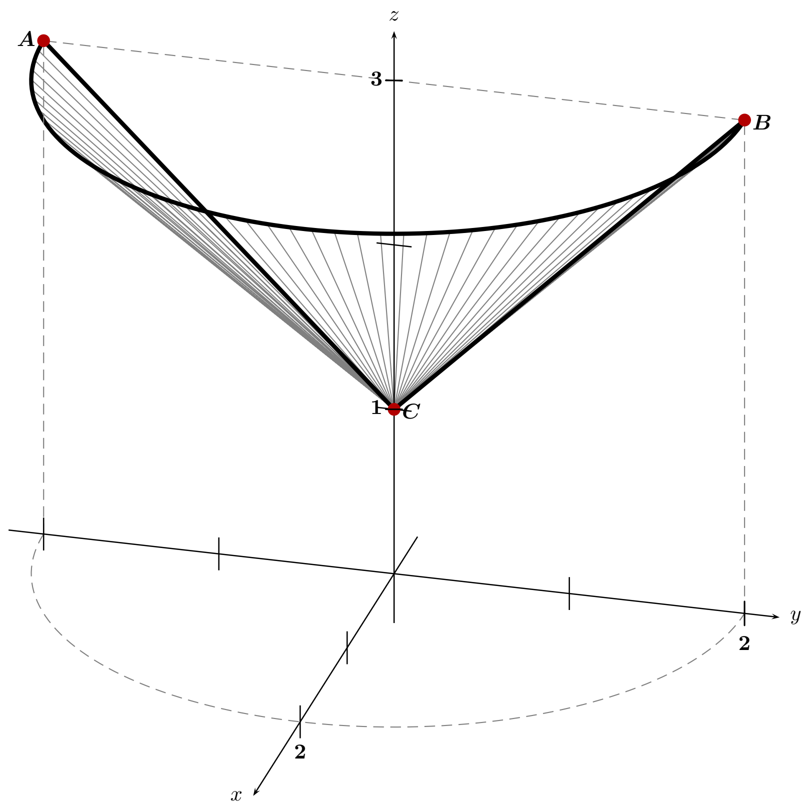
Conclusion :

$$\mathcal{F}lux_S(\vec{V}) = \mathcal{F}lux_{\Sigma_1}(\vec{V}) + \mathcal{F}lux_{\Sigma_2}(\vec{V}) + \mathcal{F}lux_{\Sigma_3}(\vec{V}) + \mathcal{F}lux_{D_1}(\vec{V}) + \mathcal{F}lux_{D_2}(\vec{V}) = \frac{38}{3} - \frac{16}{3} + 16 - 6 = \frac{52}{3}$$

Chapitre 8. Exercice A.2.1 - question 5

5. On considère $\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 1+\sqrt{x^2+y^2} = z \text{ et } z \leq 3, x \geq 0\}$ Il s'agit d'un demi-cône de sommet $(0,0,1)$

$$1+\sqrt{x^2+y^2} = z \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2 = (z-1)^2 \text{ et } z \geq 1$$



Le bord de Σ est composé de trois morceaux paramétrables comme suit :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Gamma_1 = \overrightarrow{CA} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases} \text{avec } t : 0 \to -2$$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Gamma_2 = \overset{\frown}{AB} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \\ z = 3 \end{cases} \text{avec } \theta : -\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}$$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Gamma_3 = \overrightarrow{BC} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases} \text{avec } t : 2 \to 0$$

La circulation de $\vec{V}((z-1)^2, x, y)$ le long du bord $\mathscr{C}$ de Σ est

$$\mathscr{T}_{\mathscr{C}}(\vec{V}) = \int_{\mathscr{C}} \vec{V}\cdot d\vec{\ell} = \int_0^{-2} t\times(-dt) + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\times(-2\sin\theta d\theta) + (2\cos\theta)^2 d\theta + \int_2^0 t\,dt$$

$$= \left[-\frac{t^2}{2}\right]_0^{-2} + \Big[8\cos\theta + 2\theta + \sin 2\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_2^0 = \boxed{2\pi - 4}.$$

On peut retrouver ce résultat avec le théorème de Stokes-Ampère en calculant le flux de $\mathbf{rot}\,\vec{V}$ à travers Σ orientée par les normales intérieures d'après la règle de la main droite.
Une paramétrisation de Σ est

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = (z-1)\cos\theta \\ y = (z-1)\sin\theta \quad \text{avec } z \in [1,3],\ \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]. \\ z = z \end{cases}$$

Dans ce système de coordonnées on a

$$\mathbf{rot}\,\vec{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2(z-1) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs normaux sont donnés par la formule $\vec{N} = \pm\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_z =$ où

$$\vec{T}_\theta = \begin{pmatrix} -(z-1)\sin\theta \\ (z-1)\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{T}_z = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = \pm\begin{pmatrix} (z-1)\cos\theta \\ (z-1)\sin\theta \\ -(z-1) \end{pmatrix}$$

Les normales intérieures ont une troisième composante positive. L'intégrand est donc

$$\mathbf{rot}\,\vec{V} \cdot (-\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_z) = -\Big((z-1)\cos\theta + 2(z-1)^2\sin\theta - (z-1)\Big)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Flux}_\Sigma(\mathbf{rot}\,\vec{V}) &= -\iint_{[1,3]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \Big((z-1)\cos\theta + 2(z-1)^2\sin\theta - (z-1)\Big) dz d\theta \\
&= \int_1^3 (z-1)dz \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta + \int_1^3 2(z-1)^2 dz \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta - \int_1^3 (z-1)dz \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta \\
&= -\Big[\frac{(z-1)^2}{2}\Big]_1^3 \times \Big[\sin\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \Big[\frac{2(z-1)^2}{3}\Big]_1^3 \times \Big[-\cos\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \pi\Big[\frac{(z-1)^2}{2}\Big]_1^3 \\
&= \boxed{2\pi - 4}
\end{aligned}$$

Chapitre 7. Exercice A.2.1 Question 4
Il s'agit plus précisément de la surface définie par

$$S : \quad x^2+y^2=z^2 \quad \text{et} \quad x^2+y^2-2x \leq 0$$

Il faut calculer l'aire de S.

1. On commence par paramétrer la surface S. Il s'agit d'un cône lui même composé de deux demi-cônes symétriques l'un de l'autre par rapport au plan d'équation $z=0$. Plus précisément $S=S_1 \cup S_2$ où

$$S_1 : \quad z=\sqrt{x^2+y^2}, \text{ avec } (x-1)^2+y^2 \leq 1$$

$$S_2 : \quad z=-\sqrt{x^2+y^2}, \text{ avec } (x-1)^2+y^2 \leq 1$$

Des paramétrisations de S_1 et S_2 peuvent être

$$M \in S_1 \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi_1(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix} \quad \text{avec } (x,y) \in D,$$

$$M \in S_2 \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi_2(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix} \quad \text{avec } (x,y) \in D,$$

où $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ (x-1)^2+y^2 \leq 1\}$ est le disque de centre $(1,0)$ et de rayon 1.
2. On a alors

$$\begin{aligned} \iint_S f(x,y,z) d\sigma &= \iint_{S_1} f(x,y,z)\, d\sigma + \iint_{S_2} f(x,y,z)\, d\sigma \\ &= \iint_D f \circ \Phi_1(x,y) ||\vec{t}_x \wedge \vec{t}_y||\, dxdy + \iint_D f \circ \Phi_2(x,y) ||\vec{t}_x \wedge \vec{t}_y||\, dxdy \end{aligned}$$

On calcule les deux jacobiens pour chaque morceau :

$$\text{Pour } S_1 : \quad \vec{t}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{t}_x \wedge \vec{t}_y = \begin{pmatrix} -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow ||\vec{t}_x \wedge \vec{t}_y|| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}+1} = \sqrt{2}$$

$$\text{Pour } S_2 : \quad \vec{t}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{t}_x \wedge \vec{t}_y = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow ||\vec{t}_x \wedge \vec{t}_y|| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}+1} = \sqrt{2}$$

Les résultats sont identiques pour cause de symétrie.

3. Pour le calcul d'aire, on prend $f(x,y,z)=1$.

$$\mathcal{A}ire(S) = \iint_S 1\, d\sigma = \iint_D \sqrt{2}\, dxdy + \iint_D \sqrt{2}\, dxdy = 2\sqrt{2} \iint_D 1\, dxdy = 2\sqrt{2} \times \mathcal{A}ire(D) = 2\pi\sqrt{2}.$$