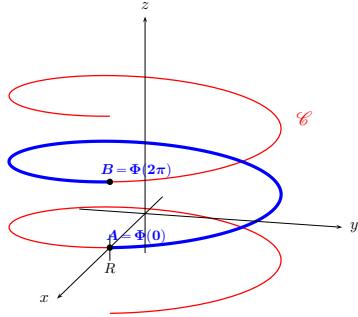


# Cours MT22 - Chapitre 6

**Exemple :** Calculer la longueur d'une hélice paramétrée par  $\Phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  avec  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\theta) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \\ a\theta \end{pmatrix}$ .

**Correction.** Il s'agit de la portion bleue sur le schéma ci-dessous.



$$\Phi'(\theta) = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \\ R \cos \theta \\ a \end{pmatrix}$$

$$||\Phi'(\theta)|| = \sqrt{(-R \sin \theta)^2 + (R \cos \theta)^2 + a^2} = \sqrt{R^2 (\underbrace{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}_{=1}) + a^2} = \sqrt{R^2 + a^2}$$

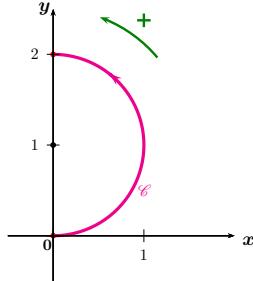
La longueur de la portion de courbe est

$$\ell(\widehat{AB}) = \int_0^{2\pi} ||\Phi'(\theta)|| d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + a^2} d\theta = \sqrt{R^2 + a^2} \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi \sqrt{R^2 + a^2}.$$

**NB :** lors que  $a = 0$  cette portion de courbe est tout simplement le cercle de rayon  $R$  et on retrouve la formule du périmètre  $2\pi R$ .

**Exemple :** Soit  $\mathcal{C}$  le bord du demi-disque défini par  $\mathcal{C} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + (y - 1)^2 = 1 \text{ et } x \geq 0\}$ . Calculer  $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\ell$  avec  $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ .

**Correction.**



- On commence par définir une paramétrisation de  $\mathcal{C}$  :

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \exists \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(\theta) = \begin{pmatrix} \phi_1(\theta) = \cos \theta \\ \phi_2(\theta) = 1 + \sin \theta \end{pmatrix}.$$

- On développe le calcul avec la formule

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\ell = \int_{\mathcal{C}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b P(\phi_1(t), \phi_2(t)) \phi'_1(t) dt + Q(\phi_1(t), \phi_2(t)) \phi'_2(t) dt$$

dans le cas où  $\mathcal{C} = \Phi([a, b])$  avec

$$\begin{aligned} x = \phi_1(t) &\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \phi'_1(t) \Rightarrow dx = \phi'_1(t) dt \\ y = \phi_2(t) &\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \phi'_2(t) \Rightarrow dy = \phi'_2(t) dt. \end{aligned}$$

- Le sens trigonométrique correspond au sens des valeurs  $\theta : -\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . On obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\ell &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin \theta) \times (-\sin \theta) d\theta + (-\cos \theta) \times \cos \theta d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( -\sin \theta - \underbrace{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}_{=-1} \right) d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\sin \theta - 1) d\theta \\ &= \left[ \cos \theta - \theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2} - \left( -\left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) = -\pi. \end{aligned}$$