Cours MT22 - Chapitre 6

Exercice A.1.11 : Soit $\vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ z + \alpha x^2 \\ y \end{pmatrix}$ un champ de vecteur de classe $\mathscr{C}^1$ au moins.

1. On détermine la valeur de α de sorte que $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{F} = 0$.

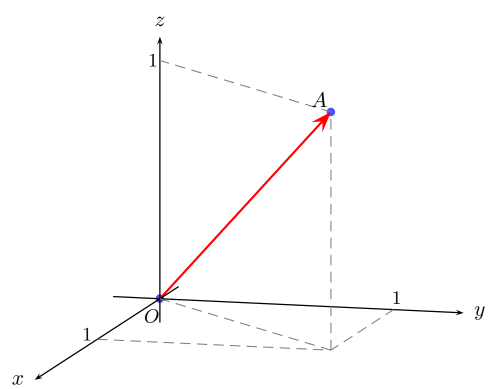
$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-0 \\ 2\alpha x - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (2\alpha - 1)x \end{pmatrix}.$$

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ,\ \overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{F}(x,y,z = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2}.$$

Pour cette valeur de $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient $\vec{F} = \nabla f$ où

$$f(x,y,z) = \frac{x^2 y}{2} + yz + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. La courbe $\mathscr{C}$ est le chemin rectiligne orienté suivant



• On commence par calculer la circulation de $\vec{F}$ sur $\overrightarrow{OA}$ à l'aide de la définition.
Une paramétrisation de $\overrightarrow{OA}$ est

$$M \in \mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, t \in [0,1],\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(t) = (1-t)O + tA = \begin{pmatrix} \phi_1(t) = t \\ \phi_2(t) = t \\ \phi_3(t) = t \end{pmatrix}.$$

Le sens de parcours allant du point O au point A corresponda au sens des valeurs $t : 0 \to 1$. On obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathscr{C}} \vec{F} \cdot \vec{d\ell} &= \int_{\mathscr{C}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \\
&= \int_0^1 P(\phi_1(t),\phi_2(t),\phi_3(t))\phi_1'(t)dt + Q(\phi_1(t),\phi_2(t),\phi_3(t))\phi_2'(t)dt + R(\phi_1(t),\phi_2(t),\phi_3(t))\phi_3'(t)dt \\
&= \int_0^1 t^2 \times 1dt + (t + \frac{t^2}{2}) \times 1dt + t \times 1dt \\
&= \int_0^1 (2t + \tfrac{3}{2}t^2)dt = \left[t^2 + \frac{t^3}{2}\right]_0^1 = 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}.
\end{aligned}$$

• On vérifie l'égalité avec

$$f(A) - f(O) = (\frac{1}{2} + 1 + C) - (C) = \tfrac{3}{2} = \int_{\mathscr{C}} \vec{F} \cdot \vec{d\ell}.$$

Exercice A.1.12 : Soit $\vec{F} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x+y \end{pmatrix}$ un champ de vecteur de classe $\mathscr{C}^1$ au moins.

• Le bord $\mathscr{C}$ du disque D de centre O et de rayon $R > 0$ est fermé et sans point double. Une paramétrisation de ce cercle est

$$M \in \mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \theta \in [0, 2\pi[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(\theta) = \begin{pmatrix} \phi_1(\theta) = R\cos\theta \\ \phi_2(\theta) = R\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Le sens direct correspond au sens croissant des valeurs $\theta : 0 \to 2\pi$. Dans ce cas

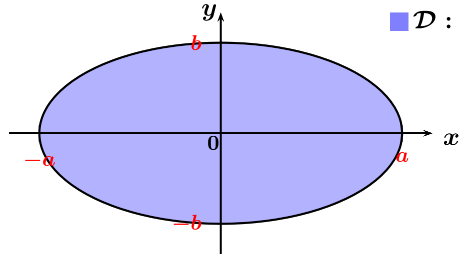
$$\begin{aligned}
\int_{\mathscr{C}} Pdx + Qdy &= \int_0^{2\pi} (R\cos\theta + R\sin\theta) \times (-R\sin\theta) d\theta + (2R\cos\theta + R\sin\theta) \times R\cos\theta \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-R^2 \cos\theta \sin\theta - R^2 \sin^2\theta + 2R^2\cos^2\theta + R^2 \sin\theta\cos\theta \right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-R^2 \sin^2\theta + 2R^2 \cos^2\theta \right] d\theta \\
&= R^2 \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1-\cos 2\theta}{2} + 1 + \cos 2\theta \right] d\theta \\
&= R^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + 3\cos 2\theta}{2} d\theta \\
&= R^2 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{3\sin 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi R^2.
\end{aligned}$$

• On vérifie l'égalité de Green-Riemann.
On calcule l'intégrand $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2 - 1 = 1$.

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy = \iint_D 1 \, dxdy = \mathcal{A}ire(D) = \pi R^2 = \int_{\mathscr{C}} \vec{F} \cdot \vec{d\ell}.$$

Exemple : Calculer l'aire du domaine délimité par une ellipse $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$

Correction. Au chapitre 4, nous avions trouvé $\mathcal{A}ire(D) = ab\pi$



Le bord de $\mathscr{C}$ se paramétrise de la façon suivante

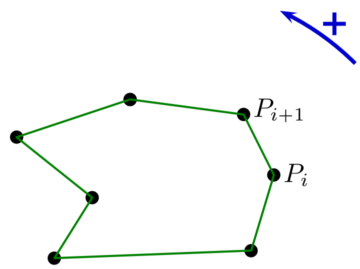
$$M \in \mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \theta \in [0, 2\pi[, \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(\theta) = \begin{pmatrix} \phi_1(\theta) = a\cos\theta \\ \phi_2(\theta) = b\sin\theta \end{pmatrix}$$

Le sens direct correspond au sens croissant des valeurs $\theta : 0 \to 2\pi$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}ire(D) = \int_{\mathscr{C}} x dy = \int_0^{2\pi} a\cos\theta \times b\cos\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} ab\cos^2\theta \, d\theta \\ = ab\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} \, d\theta \\ = ab\Big[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\Big]_0^{2\pi} = ab\pi \end{aligned}$$

Exemple : Calculer l'aire du domaine D délimité par un polygône de sommets $P_1(x_1, y_1), \dots, P_N(x_N, y_N)$, orientés dans le sens direct.

Correction. Considérons un polygône sans point double que nous parcourons dans le sens direct



L'aire ce polygône s'obtient alors à l'aide de l'intégrale curviligne suivante

$$\mathcal{A}ire(D) = \int_{\mathscr{C}} x\, dy = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{\overrightarrow{P_iP_{i+1}}} x\, dy.$$

Le chemin rectiligne orienté $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ se paramétrise de la façon suivante

$$M \in \overrightarrow{P_iP_{i+1}} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, t \in [0,1],\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1-t)P_i + tP_{i+1} = \begin{pmatrix} \phi_1(t) = (1-t)x_i + tx_{i+1} \\ (1-t)y_i + ty_{i+1} \end{pmatrix}.$$

Le sens de parcours allant du point P_i au point P_{i+1} se traduit par le sens des valeurs $t : 0 \to 1$. On obtient

$$\begin{aligned} \int_{\overrightarrow{P_iP_{i+1}}} x\, dy &= \int_0^1 \big[(1-t)x_i + tx_{i+1}\big] \times \big[-y_i + y_{i+1}\big] dt \\ &= (y_{i+1} - y_i)\Big[\tfrac{(1-t)^2}{2} x_i + \tfrac{t^2}{2} x_{i+1}\Big]_0^1 \\ &= (y_{i+1} - y_i)\frac{x_{i+1} - x_i}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathcal{A}ire(D) = \sum_{i=0}^{N-1} (y_{i+1} - y_i)\tfrac{x_{i+1} - x_i}{2},$$

avec la convention $P_0 = P_N$.