

Cours MT22 - Chapitre 4

Exercice : A l'aide de la première formule de Fubini, déterminer le volume du tétraèdre (à base triangulaire) délimité par les demi-plans d'inéquations

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0 \quad \text{et} \quad x + y + z \leq 1.$$

Correction. • On commence par tracer en perspective le tétraèdre : pour cela nous devons tracer ses 6 arêtes. Les inéquations définissent l'intérieur du tétraèdre.

Les cas d'égalité vous donnent les équations des 4 faces du tétraèdre : $x = 0, y = 0, z = 0$ et $x + y + z = 1$.

Une arête correspondant à l'intersection de deux faces consécutives, on obtient les 6 arêtes en étudiant toutes les intersections possibles de 2 faces parmi les 4 :

$$\begin{array}{ccccccc} \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. & , & \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. & , & \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x + y + z = 1 \end{array} \right. & , & \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. & , & \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x + y + z = 1 \end{array} \right. & \text{et} & \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{array} \right. \\ \textcircled{1} & & \textcircled{2} & & \textcircled{3} & & \textcircled{4} & & \textcircled{5} & & \textcircled{6} \end{array}$$

Le système $\textcircled{1}$ définit l'axe (Oz)

Le système $\textcircled{2}$ définit l'axe (Oy)

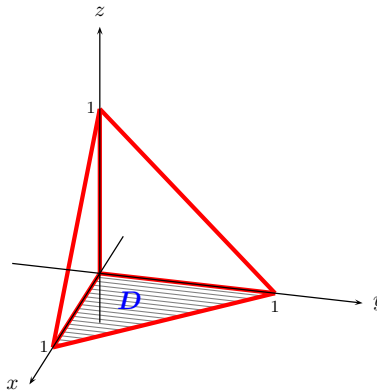
Le système $\textcircled{3}$ définit la droite d'équation $z = 1 - y$ dans le plan (yOz)

Le système $\textcircled{4}$ définit l'axe (Ox)

Le système $\textcircled{5}$ définit la droite d'équation $z = 1 - x$ dans le plan (xOz)

Le système $\textcircled{6}$ définit la droite d'équation $y = 1 - x$ dans le plan (xOy) .

On obtient la figure suivante



- Le volume de ce solide, situé au-dessus du plan $z = 0$, s'obtient à l'aide de l'intégrale double

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$

où D est la projection orthogonale du tétraèdre sur le plan $z = 0$ et $f(x, y)$ est le second membre de l'équation explicite de la face supérieure (mise sous la forme $z = f(x, y)$). De cette façon, D correspondra au domaine de définition de la fonction f ainsi obtenue (cf chapitre 1).

- Le domaine D : on cherche toutes les contraintes satisfaites par les couples (x, y) à partir des inéquations définissant le tétraèdre : On a

$$x \geq 0, \quad y \geq 0,$$

et

$$z \geq 0 \text{ et } z \leq 1 - x - y \Rightarrow \boxed{0 \leq 1 - x - y}$$

Une figure dans le plan (xOy) permet de voir que le domaine D peut être défini par

$$\mathcal{D} \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1 - x \}.$$

- L'expression de f : on met sous forme explicite (càd en isolant z) l'équation de la face supérieur qui est $x + y + z = 1 \Rightarrow z = 1 - x - y$. Donc

$$\boxed{f(x, y) = 1 - x - y.}$$

- Le volume du solide est donc

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} (1 - x - y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1 - x - y) dy \right) dx = \int_0^1 \left[(1 - x)y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \left((1 - x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx \\ &= \left[-\frac{(1-x)^3}{6} \right]_0^1 \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Il s'agit d'une pyramide à base triangulaire dont le volume est

$$\frac{\text{Aire}(\mathcal{D}) \times h_{\max}}{3} = \frac{\left(\frac{1 \times 1}{2}\right) \times 1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Exercice : A l'aide de la seconde formule de Fubini, déterminer le volume du tétraèdre (à base triangulaire) délimité par les demi-plans d'inéquations

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0 \quad \text{et} \quad x + y + z \leq 1.$$

Correction. • Le volume de ce solide est toujours donné par la formule

$$\iint_D (1 - x - y) \, dx dy.$$

• Le domaine D : Une figure dans le plan (xOy) permet de voir que le domaine D peut être défini par

$$\mathcal{D}\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1 \text{ et } 0 \leq x \leq 1 - y\}.$$

• Le volume du solide est donc

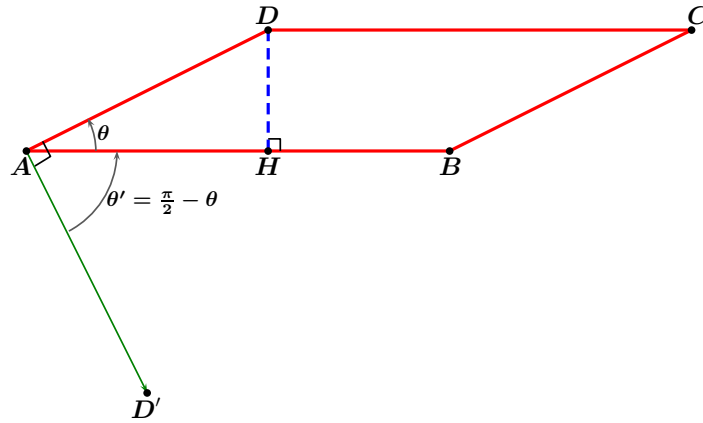
$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} (1 - x - y) \, dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} (1 - y - x) \, dx \right) dy = \int_0^1 \left[(1 - y)x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{1-y} dy \\ &= \int_0^1 \left((1 - y)^2 - \frac{(1-y)^2}{2} \right) dy \\ &= \int_0^1 \frac{(1-y)^2}{2} dy \\ &= \left[-\frac{(1-y)^3}{6} \right]_0^1 \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Remarque : • Soit $ABCD$ un parallélogramme dans le plan de repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Étant données les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$, on a $\text{Aire}(ABCD) = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| = |u_1 v_2 - v_1 u_2|$ (cf MT23).

preuve : • Soit $ABCD$ un parallélogramme. L'aire se calcule par la formule

$$AB \times DH = AB \times AD \times \sin \theta$$

où H est le projeté orthogonal de D sur la droite (AB) .



• Le déterminant $\det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} = u_1 v_2 - v_1 u_2$ se réécrit comme le produit scalaire suivant

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_2 \\ -u_2 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} v_2 \\ -u_2 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{AD}$ car

$$\begin{pmatrix} v_2 \\ -u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

et ils ont même longueur. Si on le représente à partir du point A , on obtient le vecteur $\overrightarrow{AD'}$ ci-dessus. On a donc

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD'} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{AD'}\|.$$

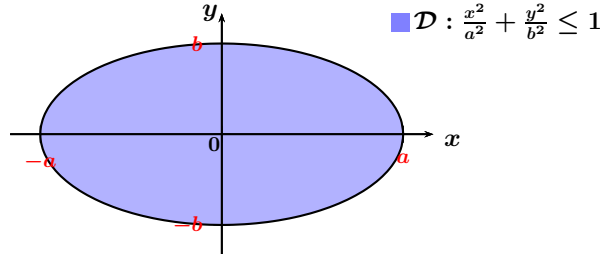
• Un produit scalaire se développe de la façon suivante

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD'} = AB \times AD' \times \cos \theta' = AB \times AD \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = AB \times AD \times \sin \theta.$$

Exemple : Déterminer l'aire de la surface délimitée par une ellipse de rayons a sur (Ox) et b sur (Oy)

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Correction. Le domaine D est le suivant



L'aire d'un domaine D est donné par la formule $\mathcal{A}ire(D) = \iint_D 1 \, dx dy$.

- On pose le changement de variable suivant (qui est une paramétrisation vue au chapitre 3)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(r, \theta) = \begin{pmatrix} a \cos \theta \times r \\ b \sin \theta \times r \end{pmatrix}, \quad \text{avec } r \in [0, 1] \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[.$$

Remarque : la valeur $r = 1$ nous donne la paramétrisation du bord (l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$) et faire varier r de 0 à 1 nous permet de parcourir le domaine D du centre jusqu'au bord.

La nouveau domaine d'intégration pour les paramètres (r, θ) est un rectangle $\Delta = [0, 1] \times [0, 2\pi[$.
Ce qui simplifie la transformation de l'intégrale double en suite d'intégrale simple.

- On compose f avec Φ :

$$f(x, y) = 1 \quad \Rightarrow \quad f \circ \Phi(r, \theta) = f(ar \cos \theta, br \sin \theta) = 1$$

- Calcul du jacobien

$$\begin{aligned} J_{\Phi}(r, \theta) &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial[ar \cos \theta]}{\partial r} & \frac{\partial[ar \cos \theta]}{\partial \theta} \\ \frac{\partial[br \sin \theta]}{\partial r} & \frac{\partial[br \sin \theta]}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ br \sin \theta & br \cos \theta \end{pmatrix} = abr \cos^2 \theta - (-abr \sin^2 \theta) \\ &= abr(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \boxed{abr} \geq 0 \end{aligned}$$

On transforme l'intégrale double en (x, y) en une intégrale double en (r, θ)

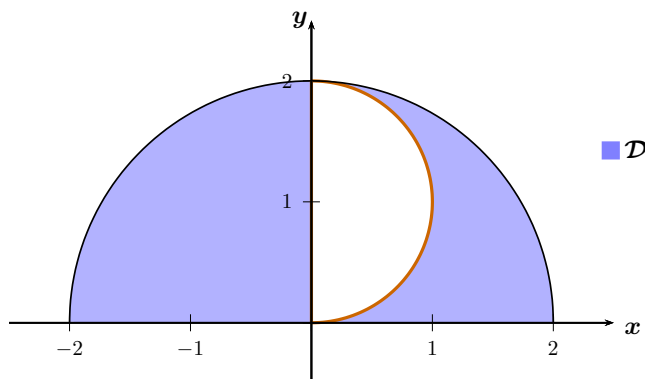
$$\begin{aligned} \mathcal{A}ire(D) &= \iint_D 1 \, dx dy = \iint_{[0,1] \times [0,2\pi[} 1 \times abr \, dr d\theta = ab \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r \, d\theta \right) dr = ab \int_0^1 [r\theta]_0^{2\pi} dr \\ &= ab \int_0^1 2\pi r \, dr \\ &= ab \left[\pi \frac{r^2}{2} \right]_0^1 = \boxed{ab\pi} \end{aligned}$$

Remarque : lorsque $a = b$, on retrouve l'aire du disque de rayon a défini par $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

$$\mathcal{A}ire(D) = \pi \times a^2$$

Exercice. Calculer $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ où $D = D_1 \setminus D_2$ avec $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq 4 \text{ et } y \geq 0\}$ et $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + (y - 1)^2 < 1 \text{ et } x > 0\}$.

Correction. Le domaine D est le suivant



La relation de Chasles nous dit que

$$I = \iint_{D_1} (x^2 + y^2) dx dy - \iint_{D_2} (x^2 + y^2) dx dy$$

On doit effectuer deux changements de variable différents pour chacun des domaines D_1 et D_2 .

Changement de variable pour D_1 :

- On pose $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(r, \theta) = \begin{pmatrix} 2r \cos \theta \\ 2r \sin \theta \end{pmatrix}$, avec $r \in [0, 1]$ et $\theta \in [0, \pi]$.
- On compose f avec Φ :

$$\begin{aligned} f(x, y) = x^2 + y^2 &\Rightarrow f \circ \Phi(r, \theta) = f(2r \cos \theta, 2r \sin \theta) = 4r^2 \cos^2 \theta + 4r^2 \sin^2 \theta \\ &= 4r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 4r^2 \end{aligned}$$

- On utilise le résultat précédent pour obtenir le jacobien : $J_\Phi(r, \theta) = abr = 2 \times 2 \times r = 4r$

On transforme l'intégrale double en (x, y) en une intégrale double en (r, θ)

$$\iint_{D_1} (x^2 + y^2) dx dy = \iint_{[0,1] \times [0,\pi]} 4r^2 \times 4r dr d\theta = \left(\int_0^1 16r^3 dr \right) \times \left(\int_0^\pi 1 d\theta \right) = [4r^4]_0^1 \times \pi = \boxed{4\pi}$$

Changement de variable pour D_2 :

- On pose $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ 1 + r \sin \theta \end{pmatrix}$, avec $r \in [0, 1]$ et $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- On compose f avec Φ :

$$\begin{aligned} f(x, y) = x^2 + y^2 &\Rightarrow f \circ \Phi(r, \theta) = f(r \cos \theta, 1 + r \sin \theta) = (r \cos \theta)^2 + (1 + r \sin \theta)^2 \\ &= r^2 \cos^2 \theta + 1 + 2r \sin \theta + r^2 \sin^2 \theta \\ &= 1 + r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 2r \sin \theta = 1 + r^2 + 2r \sin \theta \end{aligned}$$

- On utilise le résultat précédent pour obtenir le jacobien : $J_\Phi(r, \theta) = abr = 1 \times 1 \times r = r$

On transforme l'intégrale double en (x, y) en une intégrale double en (r, θ)

$$\begin{aligned}
 \iint_{D_2} (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_{[0,1] \times [0,\pi]} (1 + r^2 + 2r \sin \theta) \times r dr d\theta = \int_0^1 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r + r^3 + 2r^2 \sin \theta) d\theta \right) dr \\
 &= \int_0^1 \left[(r + r^3) \theta - 2r^2 \cos \theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dr \\
 &= \int_0^1 \pi(r + r^3) dr \\
 &= \left[\pi \left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \right) \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \boxed{\frac{3}{4}\pi}
 \end{aligned}$$

Résultat final : $I = 4\pi - \frac{3}{4}\pi$.