

Exercice A.2.4 du poly. Étude de N_1 et N_∞ .

Définition. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ (la dimension). Soit $N : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty[$ une fonction. On dit que N est une norme si les propriétés suivantes sont satisfaites :

- (i) *Séparabilité des points* : $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^d, N(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.
- (ii) *Homogénéité* : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^d, N(\lambda \vec{x}) = |\lambda| N(\vec{x})$.
- (iii) *Inégalité triangulaire* : $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, N(\vec{x} + \vec{y}) \leq N(\vec{x}) + N(\vec{y})$.

Dans cet exercice la dimension est $d = 2$.

On a démontré en TD que les fonctions N_1 et N_∞ définissent bien une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Plus généralement les fonctions $N_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty[$ définies par $N_p(\vec{x}) = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}}$ sont des normes.

Remarque : la norme N_1 vous indique la plus courte distance entre 2 nœuds d'un quadrillage, sous la condition de se déplacer sur les lignes du quadrillage.

2. La norme N_2 étant la norme euclidienne, vous savez que la boule

$$B_2 = \{\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} < 1\} = \{\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; (x_1)^2 + (x_2)^2 < 1\}$$

est l'intérieur du cercle unité $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Comparons graphiquement, les géométries obtenues pour B_1 , B_2 et B_∞ .

Pour ce faire il suffit de tracer les frontières $N_1(\vec{x}) = 1$, $N_2(\vec{x}) = 1$ et $N_\infty(\vec{x}) = 1$.

• Résolvons $N_1(\vec{x}) = 1 \Leftrightarrow |x_1| + |x_2| = 1$. Pour supprimer les valeurs absolues il faut étudier cette équation dans chaque quartier du plan.

$$x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 - x_1$$

$$x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \leq 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = -1 + x_1$$

$$x_1 \leq 0 \text{ et } x_2 \geq 0 \Rightarrow -x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 + x_1$$

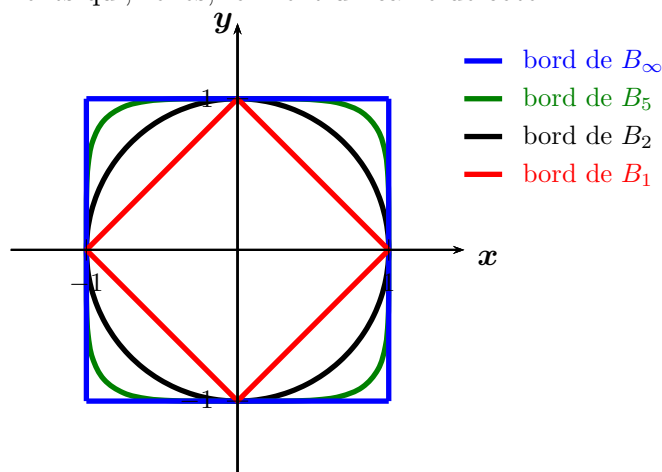
$$x_1 \leq 0 \text{ et } x_2 \leq 0 \Rightarrow -x_1 - x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = -1 - x_1$$

On obtient un segment dans chaque quartier qui, reliés, forment un carré de côté $\sqrt{2}$.

• Résolvons $N_\infty(\vec{x}) = 1 \Leftrightarrow \max(|x_1|; |x_2|) = 1$. On a les deux possibilités suivantes

$$|x_1| \leq |x_2| = 1 \Leftrightarrow x_2 = \pm 1 \text{ et } -1 \leq x_1 \leq 1 \quad \text{ou} \quad |x_2| \leq |x_1| = 1 \Leftrightarrow x_1 = \pm 1 \text{ et } -1 \leq x_2 \leq 1$$

Nous obtenons encore 4 segments qui, reliés, forment un carré de côté 2.



Sur le graphique, vous pouvez visualiser la boule B_5 (en vert) associée à la norme N_5 avec $p = 5$.

On observe que

$$B_1 \subsetneq B_2 \subsetneq \dots \subsetneq B_p \subsetneq \dots \subsetneq B_\infty$$

Plus précisément la géométrie de la boule B_p tend vers la géométrie de la boule B_∞ quand $p \rightarrow \infty$.

Exercice A.2.7 du poly.

1. Soit la fonction définie par $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$.

(a) Tout d'abord, on détermine le domaine de définition de f .

$$D_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \neq y\}.$$

La fonction est un quotient de polynômes donc elle est continue sur son domaine de définition.

(b) Il faut tenir compte de la priorité des parenthèses. On a

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 1} (1) = 1 = f(1, 0) \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 1} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1+y}{1-y} = 1 = f(1, 0)$$

(c) On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (1) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (-1) = -1$$

2. (i) La réponse à la première question est NON.

Prenons la fonction définie par $f(x, y) = y \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0, y) = 0$.

On peut montrer que la fonction f est continue en $(0, 0)$:

$$|f(r \cos \theta, r \sin \theta) - f(0, 0)| = r \underbrace{|\sin \theta|}_{\leq 1} \underbrace{|\cos(\frac{1}{r \cos \theta})|}_{\leq 1} \leq r,$$

car $\text{Im cos} = [-1, 1]$ et $\text{Im sin} = [-1, 1]$. On pose $g(r) = r$ qui vérifie $g(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$. La condition suffisante de continuité en $(0, 0)$ est démontrée.

Pourtant on peut calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} y \sin(\frac{1}{x}) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (0) = 0$$

mais la limite $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} y \sin(\frac{1}{x}) \right)$ n'existe pas car $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{x})$ n'existe pas.

NB : On peut donc avoir $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right) \neq \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right)$ et f continue en (x_0, y_0) . On a besoin de la continuité de f au voisinage de (x_0, y_0) pour suivre ces deux chemins dans le graphe de f .

(ii) La réponse à la seconde question est donc OUI.

Si f est continue en tout point d'un disque ouvert $D = B(M_0, \rho)$ pour un rayon $\rho > 0$ alors on applique l'exercice précédent sur les applications partielles. Toutes les limites existent et le résultat final est $f(x_0, y_0)$. Pour ceux qui souhaitent appliquer le théorème d'interversion de limites, par le théorème de Heine (poly MT02 chap 4, pour les intervalles $[a, b]$), f est uniformément continue sur le carré fermé $I \times J = [x_0 - \frac{\rho}{2}, x_0 + \frac{\rho}{2}] \times [y_0 - \frac{\rho}{2}, y_0 + \frac{\rho}{2}] \subset B(M_0, \rho)$. Donc les limites des fonctions partielles sont uniformes et on peut appliquer le théorème d'interversion de limites à f en (x_0, y_0) sur $I \times J$.