

Chapitre 5. Exercice A.2.1-question 1 Application de la formule de dérivation

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)).$$

- $g \circ f(x) = \ln |\tan \frac{x}{2}|$ sur $] -\pi, \pi[\setminus \{0\}$.

On pose $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $g(t) = \ln |t|$, puis $\forall x \in] -\pi, \pi[$, $f(x) = \tan \frac{x}{2}$

$$g'(t) = \begin{cases} \frac{-1}{t} = \frac{1}{-t} & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{t} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \tan'(\frac{x}{2})$$

$$\tan'(\theta) = \frac{\cos \theta \times \cos \theta - (-\sin \theta) \times \sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}.$$

Finalement,

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \times \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} = \frac{1}{2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$$

- $g \circ f(x) = \cos^2(3 \sin(4x))$ sur $\mathbb{R}$.

On pose $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \cos^2 t$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 3 \sin(4x)$.

$$g'(t) = -2 \sin t \cos t = -\sin(2t) \text{ et } f'(x) = 12 \cos(4x).$$

On obtient

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) = 12 \cos(4x) \times (-\sin(6 \sin(4x))) = -12 \cos(4x) \sin(6 \sin(4x)).$$

Chapitre 5. Exercice hors poly

On définit les trois fonctions f_1 , f_2 et f_3 sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 \ln |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} x^4 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad f_3(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On admet que ces trois fonctions sont continues car il s'agit de prolongements par continuité. Pour chacune des fonctions ci-dessus :

1. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$ et $f'(0)$.
2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $f''(x)$ pour $x \neq 0$.
4. Est-ce que $f''(0)$ existe ?
5. Est-ce que f est de classe $\mathcal{C}^2$?

Correction.

Étude de la fonction f_1

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'_1(x) = 2x \ln |x| + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln |x| + x$ et $f'_1(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| = 0$.
2. Par somme/produit/composition de fonctions usuelles, la fonction dérivée f'_1 est continue sur $\mathbb{R}^*$. En $a = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f'_1(x) = 0 = f'_1(0)$ donc f'_1 est aussi continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$. On dit que f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f''_1(x) = 2 \ln |x| + 2x \times \frac{1}{x} + 1 = 2 \ln |x| + 3$. Cette expression est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. On peut dire que f_1 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$.
4. On étudie la limite du taux d'accroissement pour la fonction dérivée f'_1 :

$$\frac{f'_1(x) - f'_1(0)}{x - 0} = \frac{2x \ln |x| + x}{x} = 2 \ln |x| + 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty.$$

La limite n'existe pas donc $f''_1(0)$ n'existe pas. On ne peut pas étudier la continuité de f''_1 en $a = 0$. La fonction f_1 n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Étude de la fonction f_2

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'_2(x) = 4x^3 \sin(\frac{1}{x}) + x^4 \times (-\frac{1}{x^2}) \cos(\frac{1}{x}) = 4x^3 \sin(\frac{1}{x}) - x^2 \cos(\frac{1}{x})$ et $f'_2(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin(\frac{1}{x}) = 0$.
2. Par somme/produit/composition de fonctions usuelles, la fonction dérivée f'_2 est continue sur $\mathbb{R}^*$. En $a = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f'_2(x) = 0 = f'_2(0)$ donc f'_2 est aussi continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$. On dit que f_2 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f''_2(x) = 12x^2 \sin(\frac{1}{x}) - 6x \cos(\frac{1}{x}) - \sin(\frac{1}{x})$. Cette expression est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. On peut dire que f_2 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$.
4. On étudie la limite du taux d'accroissement pour la fonction dérivée f'_2 :

$$\frac{f'_2(x) - f'_2(0)}{x - 0} = \frac{4x^3 \sin(\frac{1}{x}) - x^2 \cos(\frac{1}{x})}{x} = 4x^2 \sin(\frac{1}{x}) - x \cos(\frac{1}{x}) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

La limite existe donc $f''_2(0) = 0$.

5. Comme $\sin(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite en 0, la fonction dérivée $f'_2(x)$ n'admet pas de limite en 0 donc n'est pas continue en 0. La fonction f_2 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Étude de la fonction f_3 On démontre (sans DL) tout d'abord que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$.
D'après la règle de composition de limite, on peut remplacer x par $2x$ et on a

$$\ell = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin(2x)}{(2x)^3}.$$

Or, $\frac{2x - \sin(2x)}{(2x)^3} = \frac{x - \cos x \sin x}{4x^3}$ donc $4\ell = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \cos x \sin x}{x^3}$. On étudie la différence

$$4\ell - \ell = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \ell = \frac{1}{6}$$

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'_3(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x - 1}{x} + \frac{x - \sin x}{x^2}$ et $f'_3(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \ell \times 0 = 0$.
2. Par somme/produit/composition de fonctions usuelles, la fonction dérivée f'_3 est continue sur $\mathbb{R}^*$.

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{\cos x - 1}{x^2} \times x \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \times 0 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\sin x - x}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

En $a = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f'_3(x) = 0 = f'_3(0)$ donc f'_3 est aussi continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$. On dit que f_3 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}^*, f''_3(x) = -\frac{\sin x}{x} - \frac{2(x \cos x - \sin x)}{x^3} = -\frac{\sin x}{x} - \frac{2(\cos x - 1)}{x^2} + \frac{2(\sin x - x)}{x^3}$.

Cette expression est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. On peut dire que f_3 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$

4. On étudie la limite du taux d'accroissement pour la fonction dérivée f'_2 :

$$\frac{f'_3(x) - f'_3(0)}{x - 0} = \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{x - \sin x}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}.$$

La limite existe donc $f''_3(0) = -\frac{1}{3}$.

5. On calcule $\lim_{x \rightarrow 0} f''_3(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin x}{x} - \frac{2(\cos x - 1)}{x^2} + \frac{2(\sin x - x)}{x^3} \right) = -1 - (-1) + 2 \times \left(-\frac{1}{6} \right) = -\frac{1}{3} = f''_3(0)$. La fonction f''_3 est aussi continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$. On dit que f_3 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.