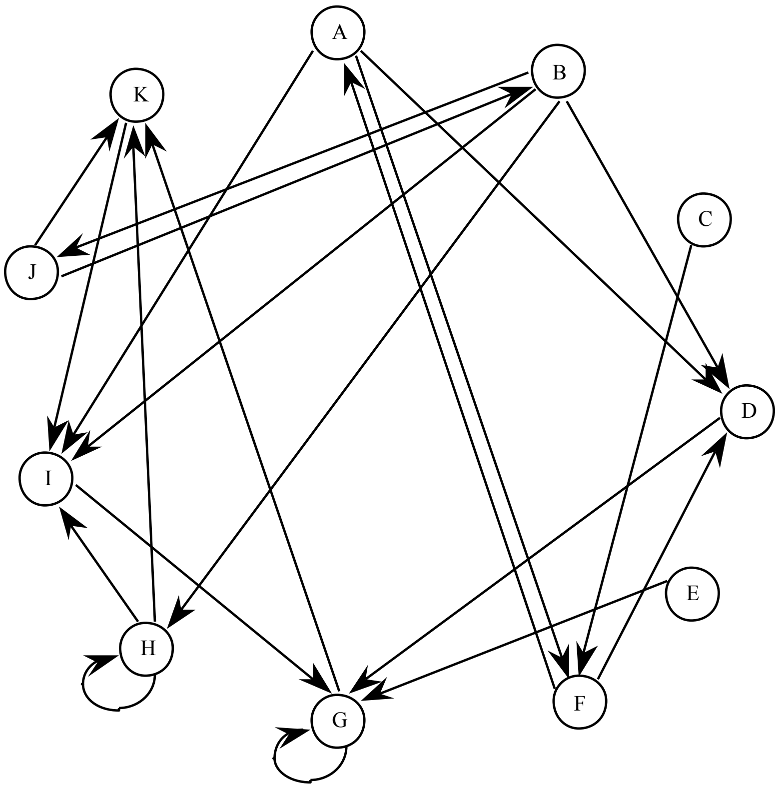
Correction du

TD2 R003

Fermeture transitive d'un graphe G=(X,U) orienté et composantes fortement connexes.

On considère le graphe suivant :



<u>Définition 1 :</u> Soit i un sommet de G. On appelle fermeture transitive directe de i, l'ensemble des sommets j de G tels que : (i=j) ou (il existe un chemin de i à j), j est alors un descendant de i.

<u>Question 0 :</u> rapporter la matrice associée à ce graphe.

<u>Question 1: détermination des successeurs d'un sommet</u>

On note $\Gamma(i)$ l'ensemble des successeurs du sommet i. Ecrire les successeurs des sommets du graphe ci-dessus.

Quelle est la complexité de la recherche des successeurs d'un sommet si le graphe est codé par la matrice associée ?

<u>Question 2 : calcul des descendants d'un sommet</u>

On note $\hat{\Gamma}(i)$ l'ensemble des descendants de i (i est considéré comme descendant d'ordre 0 de lui même), et $\Gamma^k(i)= \Gamma(\Gamma^{k-1}(i))$ l'ensemble des successeurs de i à l'ordre k.

Montrer que : $\hat{\Gamma}(i) = \{i\} + \Gamma(i)+ \Gamma^2(i) +\Gamma^3(i)+...+ \Gamma^{n-1}(i)$.

On suppose que le graphe est codé par la matrice associée. Ecrire les descendants du sommet A du graphe ci-dessus ?

Quelle est la complexité, en utilisant cette méthode, de la recherche des descendants d'un sommet si le graphe est codé par la matrice associée ?

Question 3 : calcul des descendants d'un sommet

Soit j un descendant de i. On dit que j est à distance k de i si k est la longueur du plus court chemin entre i et j, on va dire que j appartient à $D^k(i)$.

Montrer que : $\hat{\Gamma}(i) = \{i\} + D^1(i) + D^2(i) + \ldots + D^k(i) + \ldots + D^{n-1}(i)$.

Procedure "Descendants de (i)"

Début

$D^0(i) = \{i\}, \hat{\Gamma}(i) = \{i\}$;

Pour k = 1 à n-1 faire

$D^k(i) = \Gamma(D^{k-1}(i)) - \hat{\Gamma}(i)$;

$\hat{\Gamma}(i) = \hat{\Gamma}(i) + D^k(i)$;

Fin pour;

Fin.

Quelle est la complexité, en utilisant cette méthode, de la recherche des descendants d'un sommet si le graphe est codé par la matrice associée ?

Définition 2 : On appelle fermeture transitive inverse de i, l'ensemble des sommets j de G tels que (i=j) ou (il existe un chemin de j à i) j est alors un ascendant de i.

Question 4 : Détermination des prédécesseurs d'un sommet

On note $\Gamma^{-1}(i)$ l'ensemble des prédécesseurs du sommet i.

Ecrire les prédécesseurs des sommets du graphe ci-dessus.

Question 5 : Détermination des ascendants d'un sommet

Proposer une méthode analogue à la précédente pour calculer les ascendants d'un sommet i. Quelle est sa complexité ?

Question 6 :

Que représente l'ensemble des sommets qui sont à la fois descendants et ascendants du sommet i ?

Question 7 :

Proposer un algorithme basé sur les questions précédentes pour chercher l'ensemble des composantes fortement connexes d'un graphe. Quelle est sa complexité (cette méthode s'appelle la méthode de MALGRANGE) ? Appliquer cette méthode à l'exemple précédent en utilisant la matrice écrite. On distinguera, en appliquant l'algorithme, les descendants (resp. ascendants) d'ordre 1, d'ordre 2, ... etc.

Question 8 :

Dessiner le graphe réduit, le graphe initial est-il planaire ?

Q0

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	$\Gamma'(A)$
A	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0/2
B	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	
C	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
D	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1/2/3
E	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
F	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1/3
G	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	2/3
H	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	
I	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1/3
J	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
K	0	0	0	0	0	0	0	0	[illegible]	0	0	3

Q1) $\Gamma(A) = \{D, F, I\}$. $\Gamma(B) = \{D, H, I, J\}$. Complexité $O(n)$

Q2) Demonstration de la validité de la formule :

$$\Gamma'(i) = \{i\} + \Gamma^1(i) + \Gamma^2(i) + \dots + \Gamma(i)$$

$\boxed{\supseteq}$ est verifiée car $\Gamma^k(i)$ $\forall k$, donne les descendants de l'ordre k qui font forcement partie des descendants.

$\boxed{\subseteq}$. Soit $j \in \Gamma'(i) \Rightarrow j$ est un descendant de i et il $\exists$ un chemin μ de i vers j.
Selon le lemme de Koenig on peut extraire de μ un chemin elementaire de longueur $k \leq n-1 \Rightarrow j \in \Gamma^k(i) \Rightarrow$ propriété verifiée.

le Calcul de $\Gamma'(A)$ donne : $\Gamma'(A) = \{A, D, F, G, I, K\}$.

Calcul des desc (i)

Debut,
$\Gamma'(i) = \{i\}$, $\Gamma^0(i) = \{i\}$.
pour $k = 1$ à $n-1$ faire
$O(n^3)$ $O(n^2)$ $\Gamma^k(i) = \Gamma(\Gamma^{k-1}(i))$
$\Gamma'(i) = \Gamma'(i) + \Gamma^k(i)$
fin (pour)
Ecrire $\Gamma'(i)$

Fin

Complexité:
$\Gamma(i) \Rightarrow O(n)$
$\Gamma^k(i)$ peut contenir au pire tous les sommets $\Rightarrow$
$\Gamma(\Gamma^k(i)) \sim O(n^2)$
Donc chaque itération coute $O(n^2) \Rightarrow$ Complexité globale $(n-1) * O(n^2) = O(n^3)$

Q3) $\Gamma'(i) = \{i\} + D^1(i) + D^2(i) + \dots D^{n-1}(i)$

$\supseteq$ est vérifiée ✓. (facile)

$j \in \Gamma'(i) \Rightarrow \exists$ un chemin élémentaire de i vers j de long. $k \leq n-1$

$\Rightarrow$ l'ensemble des chemins élémentaires de i vers j n'est pas vide et il est fini $\Rightarrow$ il $\exists$ un plus court chemin (élémentaire) de i vers j de long. $l \leq k \leq n-1 \Rightarrow j \in D^l(i)$ $l \leq n-1$.

donc la propriété est vérifiée.

Complexité : Un sommet quelconque j ne peut faire partie d'au plus un seul $D^k(i)$, $k \leq n-1 \Rightarrow$ chaque sommet sera examiné (appliquer l'opérateur Γ) au plus une fois $\Rightarrow$ complexité globale $= \simeq n \cdot \times O(n) = O(n^2)$.

Q4) Il suffit d'examiner les colonnes au lieu des lignes de la matrice associée.

Ainsi, pour A nous aurons : $\Gamma^{-1}(A) = \{F\}$

Q5) Il y a deux méthodes : (1) Travailler avec les colonnes
(2) Travailler avec la matrice associée transposée.

Ensuite la complexité est la même, donc $O(n^2)$.

Q6) l'intersection des descendants d'un sommet i avec les ascendants de ce même sommet donne la composante fortement connexe de ce sommet. $CFC(i) = \Gamma(i) \cap \Gamma^{-}(i)$

Q7

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	$\hat{\Gamma}(A)$	
A	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	
B	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0		0
C	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0		
D	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0		0
E	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0		
F	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	
G	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1		0
H	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1		
I	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0		2
J	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1		1
K	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0		1
	0	0					0	2	1		2		

Méthode pratique :

On calcule $\hat{\Gamma}(A)$ et $\hat{\Gamma}^{-}(A)$ et on déduit $CFC(A) = \hat{\Gamma}(A) \cap \hat{\Gamma}^{-}(A) = \{A, F\}$.

Ensuite on raye les lignes et les colonnes de $CFC(A)$ dans la matrice et on continue avec le prochain sommet. On prend B et on obtient $CFC(B) = \{B, J\}$; et ainsi de suite...

CFC(A)

$\hat{\Gamma}(A) = \{A, D, F, G, I, K\}$.

$\hat{\Gamma}^{-}(A) = \{A, F, C\}$.

$\Rightarrow CFC(A) = \{A, F\}$.

CFC(B)

$\hat{\Gamma}(B) = \{B, D, G, H, I, J, K\}$.

$\hat{\Gamma}^{-}(B) = \{B, J\}$

$CFC(B) = \{B, J\}$.

$CFC\{C\} = \{C\}$.

CFC(D) :

$\hat{\Gamma}(D) = \{D, G, I, K\}$

$\hat{\Gamma}^{-}(D) = \{D\}$.

$CFC(D) = \{D\}$

$CFC(E) = \{E\}$

$CFC(G) = \{G, I, K\}$

$CFC(H) = \{H\}$

Méthode de Malgrange (Pseudo Algorithme :)

Début : Initialement tous les sommets sont non marqués.

Tant qu'il y a un sommet i non marqué faire :

Calculer $CFC(i)$

Marquer tous les sommets de $CFC(i)$

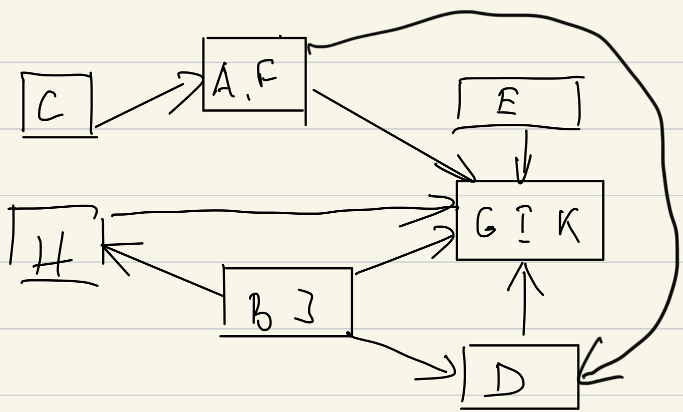
Fin Tant Que

FIN.

Complexité chaque itération coûte $O(n^2) \Rightarrow$ Complexité globale est de $O(n^3)$.

Q8)

Graphe réduit.



le graphe est planaire