RO03
Problèmes de cheminement

Recherche de chemins « optimaux »

Exemples d’applications

- Rechercher un meilleur itinéraire (le plus court, le moins long, le plus beau, le plus intéressant, le plus sûr) : GPS, sites internet, etc.
- Quand remplacer sa voiture en fonction du prix de revente (qui diminue d’année en année) et des frais d’entretient (qui augmente d’année en année) ?
- Comment optimiser ses placements financiers en fonction des rendements des différentes possibilités ?
- Trouver la suite d’actions pour réussir un jeu solitaire déterministe de stratégie.

Applications

- Sous-problème de nombreux problèmes d'optimisation.
- Applications dans les transports:
  - Tournées de véhicules;
  - Détermination du trajet le plus rapide ou le plus court.
- Théorie des jeux.
- Applications dans les réseaux télécom.
- *etc.* (fiabilité / capacité)

Problèmes de chemins optimaux

fonction de coût

- G=(X,U,v) avec:
  - X={x_0, x_1, x_2,…, x_{n-1}} et v : U→$\mathbb{R}$

    arcs

- Longueur d'un chemin : nombre d'arcs du chemin

- Valeur d'un chemin : somme des valuations du chemin

- Un chemin de x_i à x_k est de valeur minimale si sa valeur est plus petite (inférieure ou égale) que celle de tout autre chemin allant de x_i à x_k.

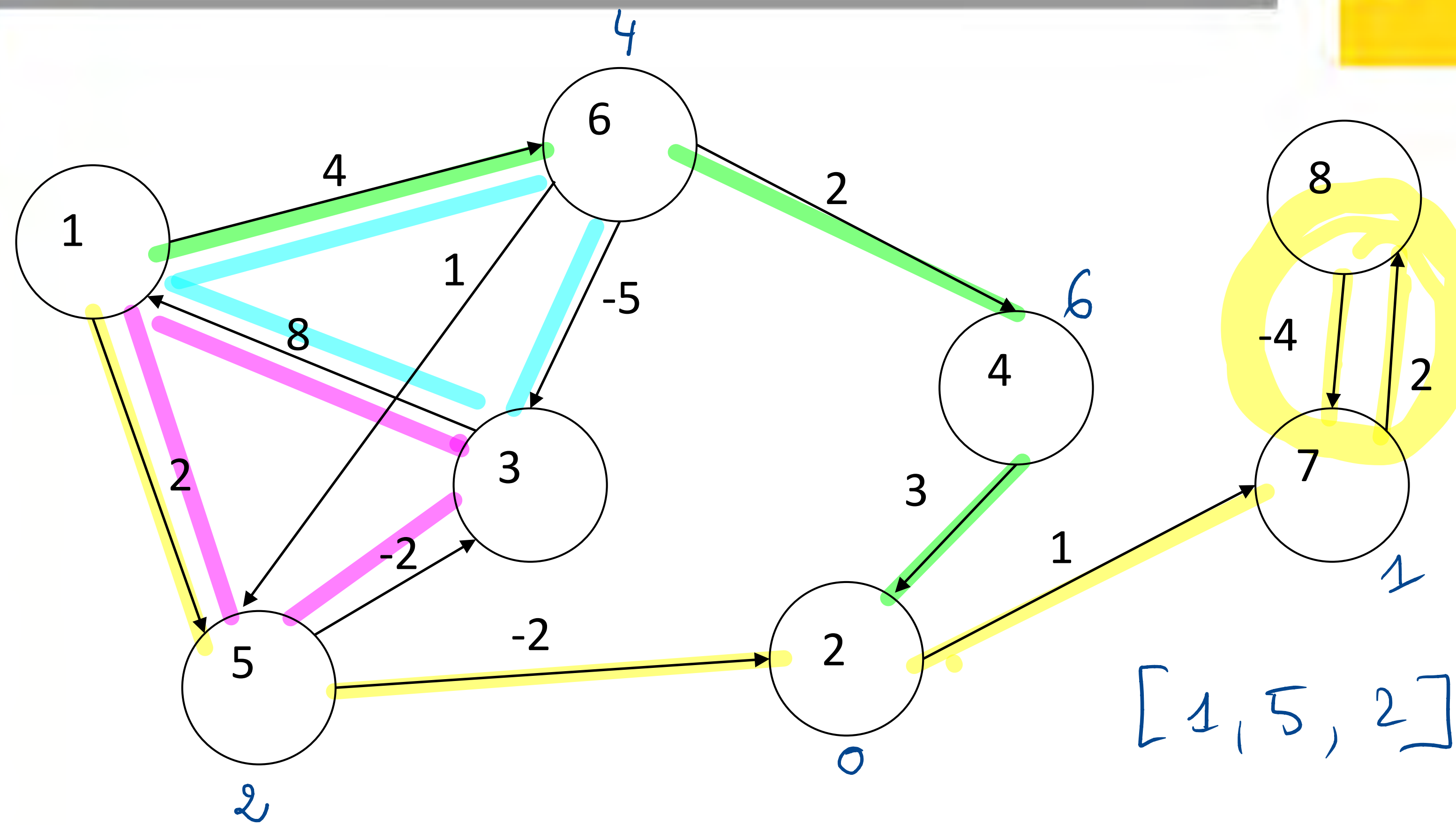
Par extension, on étend la fonction v aux chemins pour la valeur des chemins.

Si $\mu = [y_0, \dots, y_k]$ est un chemin alors $v(\mu) = \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} v((y_i, y_{i+1}))}_{\text{somme des valuations des arcs du chemin.}}$.

Problèmes de chemins optimaux

Trois types de problèmes:

- Etant donné deux sommets x_i et x_k, trouver un chemin de valeur minimale (s'il existe);
- Etant donné un sommet x_s, trouver les chemins de valeurs minimales (s'ils existent) allant de x_s à tout autre sommet x_i;
- Trouver un chemin de valeur minimale (s'ils existent) entre tout couple de sommets.



- Trouver un chemin de valeur minimale entre les sommets 1 et 2.
- Existe-t-il un chemin de valeur minimale entre 1 et 7 ?

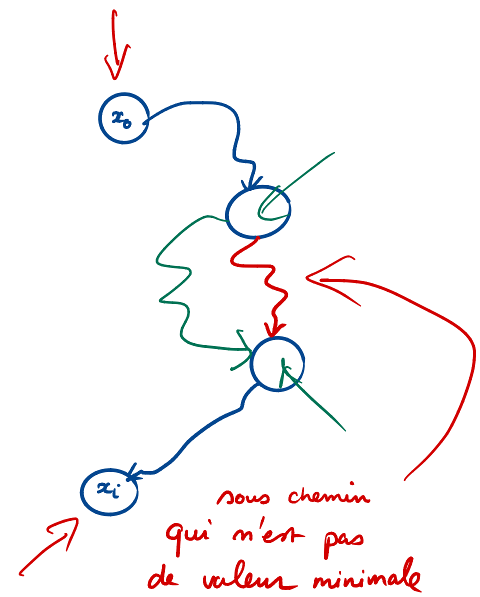
Propriétés

Propriétés des chemins minimaux

- Tout sous-chemin d'un chemin de valeur minimale est un chemin de valeur minimale.

Intuitivement :

Si un sous-chemin d'un chemin de x_0 à x_i n'est pas de valeur minimale,
alors on peut remplacer ce sous-chemin par un chemin qui va du même sommet source au même sommet destination pour obtenir un meilleur de x_0 à x_i



Plus formellement :

Soit $\mu = [y_0 = x_0, \dots, y_k = x_i]$ un chemin de valeur minimale de x_0 à x_i

et soit $\sigma = [y_u, \dots, y_v]$, $u < v$, un sous chemin de μ, i.e. $\mu = [y_0 = x_0, \dots, y_{u-1}]\sigma[y_{v+1}, \dots, y_k = x_i]$.

Supposons que σ n'est pas un chemin de valeur minimale de y_u à y_v.

Cela signifie qu'il existe un chemin $\sigma' = [z_0 = y_u, \dots, z_e = y_v]$ tel que $v(\sigma') < v(\sigma)$.

On peut alors construire $\mu' = [y_0 = x_0, \dots, y_{u-1}]\,\sigma'\,[y_{v+1}, \dots, y_k = x_i]$.

On a
$$\begin{aligned} v(\mu) &= v([y_0, \dots, y_{u-1}]) + v(\sigma) + v([y_{v+1}, \dots, y_k]) \\ &> v([y_0, \dots, y_{u-1}]) + v(\sigma') + v([y_{v+1}, \dots, y_k]) = v(\mu') \end{aligned}$$

Ce qui contredit le fait que μ est un chemin de valeur minimale.

Plus formellement :

Soit $\mu = [y_0 = x_0, \dots, y_k = x_i]$ un chemin de valeur minimale de x_0 à x_i

et soit $\sigma = [y_u, \dots, y_v]$, $u < v$, un sous chemin de μ, i.e. $\mu = [y_0 = x_0, \dots, y_{u-1}]\,\sigma\,[y_{v+1}, \dots, y_k = x_i]$.

Supposons que σ n'est pas un chemin de valeur minimale de y_u à y_v.

Cela signifie qu'il existe un chemin $\sigma' = [z_0 = y_u, \dots, z_e = y_v]$ tel que $v(\sigma') < v(\sigma)$.

On peut alors construire $\mu' = [y_0 = x_0, \dots, y_{u-1}]\,\sigma'\,[y_{v+1}, \dots, y_k = x_i]$.

On a $v(\mu) = v([y_0, \dots, y_{u-1}]) + v(\sigma) + v([y_{v+1}, \dots, y_k])$

$$> v([y_0, \dots, y_{u-1}]) + v(\sigma') + v([y_{v+1}, \dots, y_k]) = v(\mu') \Rightarrow v(\mu') < v(\mu)$$

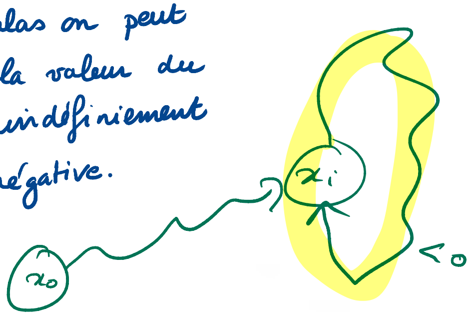
Ce qui contredit le fait que μ est un chemin de valeur minimale.

Propriétés des chemins minimaux

- Supposons qu'il existe un chemin de x_0 à x_i. S'il existe un circuit de valeur négative passant par x_i, alors il n'existe pas de chemin de valeur minimale de x_0 à x_i.

- $\Rightarrow$ Il est nécessaire qu'il n'existe pas de circuit de valeur négative passant par x_i pour qu'il existe un chemin de valeur minimale de x_0 à x_i.

<u>intuitivement :</u> s'il existe un circuit de valeur négative passant par x_i alors on peut emprunter indéfiniment la valeur du chemin en empruntant indéfiniment le circuit de valeur négative.



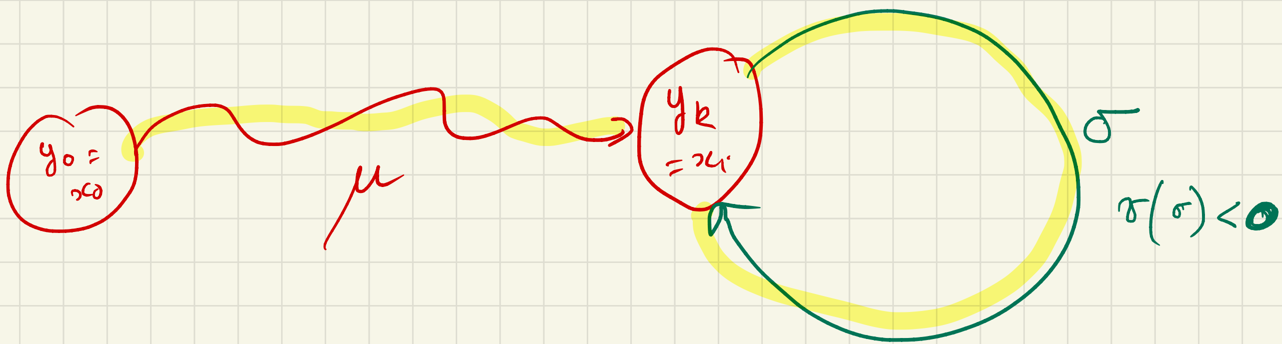
Formellement :

Soit $\mu = [\, y_0 = x_0 , \dots , y_k = x_i \,]$ un chemin de valeur minimale de x_0 à x_i.

Supposons qu'il existe un circuit $\sigma = [\, z_0 = x_i , \dots , z_l = x_i \,]$ passant par x_i de valeur négative : $v(\sigma) < 0$

Alors on peut construire le chemin $\mu' = \mu\sigma$ tel que $v(\mu') = v(\mu) + \underbrace{v(\sigma)}_{<0} < v(\mu)$

Ce qui contredit le fait que μ est de valeur minimale.



Propriétés des chemins minimaux

- En supposant qu'il existe au moins un chemin allant de x_0 à x_i quelque soit i (x_0 est une racine de G), si G est sans circuit de valeur strictement négative, alors il existe un chemin de valeur minimale de x_0 à tout autre sommet x_i.

- $\Rightarrow$Une condition suffisante pour que, pour tout i, il existe un chemin de valeur minimale allant de x_0 à x_i est que le graphe G soit sans circuit de valeur strictement négative (ces circuits sont dit absorbants).

Si G est sans circuit de valeur négative alors

de tout chemin μ de x_0 à x_i, on peut extraire un chemin élémentaire μ' de x_0 à x_i (lemme de Koenig)

Ce chemin μ' est tel que $v(\mu') \leq v(\mu)$

(tous les circuits qui ont été éliminés de μ pour obtenir μ' sont de valeur nulle ou positive).

On peut donc restreindre la recherche des chemins de valeur minimale à l'ensemble des chemins élémentaires.

L'ensemble des chemins élémentaires allant de x_0 à tout sommet x_i est fini.

Il en existe donc un qui a la plus petite valeur.

Propriétés des chemins minimaux

- Une condition nécessaire et suffisante pour que, pour tout i, il existe un chemin de valeur minimale allant de x_0 à x_i est que le graphe G soit sans circuit de valeur strictement négative (ces circuits sont dit absorbants).

Cas des chemins de valeur maximale ?

Propriétés des chemins minimaux

- Soit G un graphe sans circuit de valeur strictement négative et λ_i des valeurs de chemins entre $\mathbf{x_0}$ et tout sommet $\mathbf{x_i}$.

- Une condition nécessaire et suffisante pour que $\{\lambda_i \ / \ 0 \leq i \leq n\text{-}1\}$ soit l'ensemble des valeurs des chemins minimaux issus de $\mathbf{x_0}$ est que :

  1) $\lambda_0 = 0$;

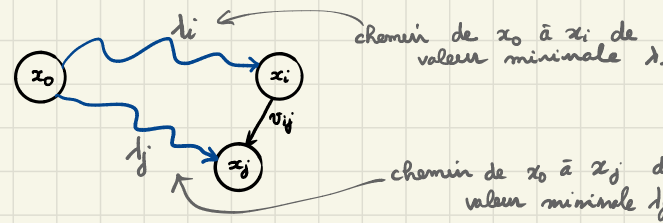
  2) $\lambda_j \leq \lambda_i + v_{ij}$, pour tout arc $(\mathbf{x_i}, \mathbf{x_j}) \in U$.

- La condition est nécessaire : si elle n'est pas vérifiée, il existe un λ_i qui ne pas être la valeur d'un chemin optimale de $\mathbf{x_0}$ à $\mathbf{x_i}$.
- La condition est suffisante : si elle est vérifiée, $\forall$i, il ne peut pas y avoir un chemin $[z_0 = \mathbf{x_0}, z_1, z_2, \ldots, z_k = \mathbf{x_i}]$ de valeur λ^*_i avec $\lambda^*_i < \lambda_i$.

Pour que $\{\lambda_i \mid i \in \{0,\dots,n-1\}\}$ soit l'ensemble des valeurs des chemins de valeur minimale de x_0 à tout autre sommet x_i $(i \in \{0,\dots,n-1\})$, il est nécessaire que :

$\boxed{\lambda_0 = 0}$: en effet, le chemin de plus petite valeur de x_0 à x_0 est nécessairement de valeur 0.

$\boxed{\forall (x_i, x_j) \in U,\ \lambda_j \leq \lambda_i + v_{ij}}$: Supposons qu'il existe un arc $(x_i, x_j) \in U$ tel que $\lambda_j > \lambda_i + v_{ij}$



Alors on peut construire un meilleur chemin de x_0 à x_j qui est de valeur λ_j

en prenant le chemin de x_0 à x_i de valeur λ_i
et en ajoutant l'arc (i,j) pour obtenir un chemin de x_0 à x_j de valeur $\lambda_i + v_{ij} < \lambda_j$.

Cela contredit le fait que λ_j est la valeur d'un chemin de valeur minimale de x_0 à x_j.

Pour que $\{\lambda_i \mid i \in \{0,\dots,n-1\}\}$ soit l'ensemble des valeurs des chemins de valeur minimale de x_0 à tout autre sommet x_i $(i \in \{0,\dots,n-1\})$, il est suffisant que :

$$\boxed{\lambda_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall (x_i, x_j) \in U, \ \lambda_j \le \lambda_i + v_{ij}} \longrightarrow \text{peut se réécrire } \lambda_j - \lambda_i \le v_{ij}$$

En effet, supposons que $\mu = [y_0 = x_0, \dots, y_k = x_i]$ soit un chemin de valeur minimale de x_0 à x_i avec $v(\mu) = \lambda_i^*$.

Tous les arcs utilisés dans le chemin μ, i.e. $(y_0,y_1),(y_1,y_2),(y_2,y_3)\cdots(y_{k-1},y_k)$, vérifient la propriété :

$$\lambda_{y_1} - \lambda_{y_0} \le v_{y_0 y_1}$$

$$\lambda_{y_2} - \lambda_{y_1} \le v_{y_1 y_2}$$

$$\lambda_{y_3} - \lambda_{y_3} \le v_{y_2 y_3}$$

$$\vdots$$

$$\lambda_{y_{k-1}} - \lambda_{y_{k-2}} \le v_{y_{k-2} y_{k-1}}$$

$$\lambda_{y_k} - \lambda_{y_{k-1}} \le v_{y_{k-1} y_k}$$

Propriétés des chemins minimaux

Pour un ensemble de valeurs $\{\lambda_i \mid i \in \{0, \dots, n-1\}\}$ vérifiant la propriété.

- Corollaire :

  l'ensemble des arcs (x_i, x_j) pour lesquels $\lambda_j - \lambda_i = v_{ij}$ est l'ensemble des arcs appartenant à des chemins minimaux.

si (x_i, x_j) est tel que $\lambda_j = \lambda_i + v_{ij}$

alors (x_i, x_j) est un arc qui permet d'aller de manière optimale de x_0 à x_j en passant par x_i et en empruntant l'arc (x_i, x_j).

Algorithmes de cheminements

Chercher un chemin de valuation minimale de x_0 à tout sommet x_i :

- Algorithme de FORD :
  - Valide avec des valuations quelconque
  - O(n m)
  - Algorithme à correction d'étiquettes

- Algorithme de DIJKSTRA :
  - Valide uniquement avec des valuations positives ou nulles
  - O(n²)
  - Algorithme à fixation d'étiquette

- Algorithme de BELLMAN :
  - Valide avec des valuations quelconque mais uniquement s'il n'existe pas de circuit
  - O(m)
  - Algorithme à fixation d'étiquettes

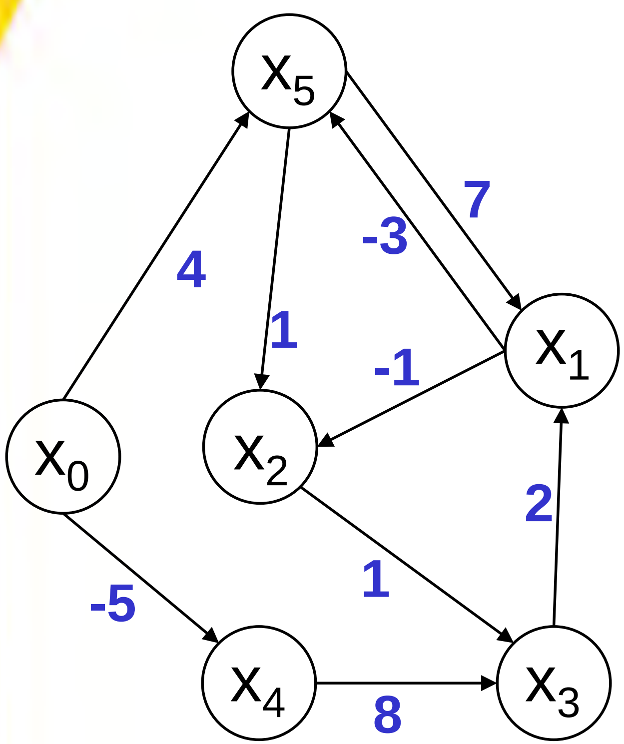
Algorithme de FORD

```
λ[0] ←0; P[0] ←0;
pour i←1 à n-1 faire { λ[i] ← ∞; P[i] ← -1; }
faire {
    modification←faux;
    pour i←0 à n-1 faire {
        si (P[i]≠-1) alors {
            pour chaque successeurs x_j de x_i faire {
                si (λ[j]> λ[i]+v_ij) alors {
                    P[j] ←i; // x_j est atteint à partir de x_i
                    modification ←vrai;
                    λ[j] ← λ[i]+v_ij;
                }
            }
        }
    }
} tant que (modification=vrai)
```

$\lambda[i]$ = valeur d'un chemin trouvé de x_0 à x_i si $\neq \infty$

$P[i]$ = prédécesseur de x_i dans le chemin trouvé si $P[i] = -1$

Algorithme de FORD

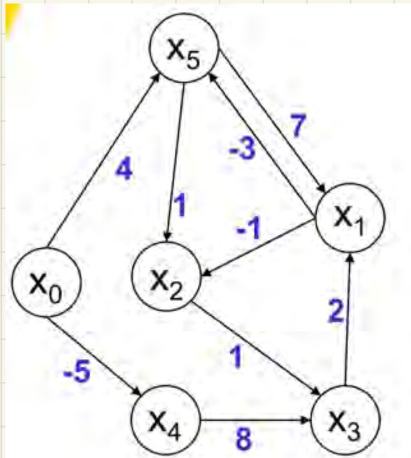



```
λ[0] ←0; P[0] ←0;
pour i←1 à n-1 faire { λ[i] ← ∞; P[i] ← -1; }
faire {
    modification←faux;
    pour i←0 à n-1 faire {
        si (P[i]≠-1) alors {
            pour tout xj∈U+(xi) faire {
                si (λ[j]> λ[i]+vij) alors {
                    P[j] ←i;
                    modification ←vrai;
                    λ[j] ← λ[i]+vij;
                }
            }
        }
    }
} tant que (modification=vrai)
```

$O(m)$

$O(d^+(i))$

$$\sum_{i=0}^{n-1} d^+(i) = m$$




```
λ[0] ←0; P[0] ←0;
pour i←1 à n-1 faire { λ[i] ← ∞; P[i] ← -1; }
faire {
    modification←faux;
    pour i←0 à n-1 faire {
        si (P[i]≠-1) alors {
            pour tout xj∈U+(xi) faire {
                si (λ[j]> λ[i]+vij) alors {
                    P[j] ←i;
                    modification ←vrai;
                    λ[j] ← λ[i]+vij;
                }
            }
        }
    }
} tant que (modification=vrai)
```

i	$\lambda[i]$	$P[i]$
0	0	0
1	$\cancel{\infty}$ $\cancel{1}$ 5	$\cancel{-1}$ $\cancel{5}$ 3
2	$\cancel{\infty}$ $\cancel{5}$ $\cancel{4}$ 3	$\cancel{-1}$ $\cancel{5}$ $\cancel{2}$ 5
3	$\cancel{\infty}$ 3	$\cancel{-1}$ 4
4	$\cancel{\infty}$ -5	$\cancel{-1}$ 0
5	$\cancel{\infty}$ $\cancel{4}$ 2	$\cancel{-1}$ $\cancel{0}$ 1

modification = faux

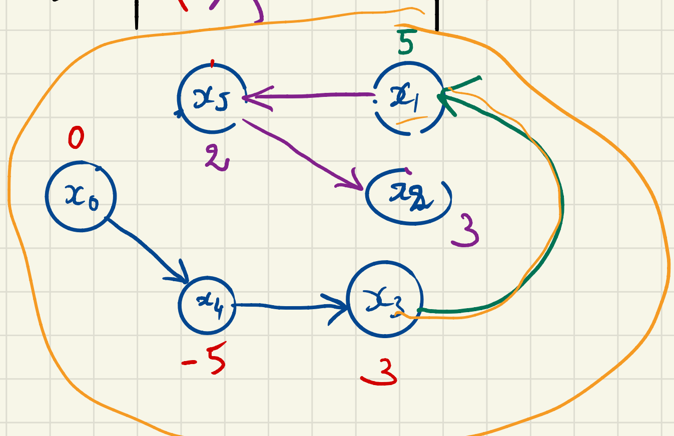
$i = 5$

$j = 1$

$$\underbrace{\lambda[i]}_{5} > \underbrace{\overset{2}{\lambda[j]} + \overset{7}{v_{j1}}}_{9}$$

$j = 2$

$$\underbrace{\lambda[2]}_{3} > \underbrace{\overset{2}{\lambda[j]} + \overset{1}{v_{j2}}}_{3}$$



Algorithme de FORD : preuve

- Théorème : si le graphe est sans circuit absorbant, l'algorithme calcule les valeurs des chemins minimaux.
- Démonstration de l'algorithme par récurrence :
  - On appelle λ_i^k, la valeur minimale d'un chemin de $\mathbf{x_0}$ à $\mathbf{x_i}$ empruntant au plus k arcs.

Invariant:

À la fin de la $k^{\mathbf{e}}$ itération, si $P[i] \neq -1$, $\lambda[i]$ est la valeur d'un chemin de x_0 à x_i telle que $\lambda[i] \leq \lambda_i^k$.

Propriété que l'on vraie à la fin de chaque itération et qui permet de montrer la validité de l'algorithme.

On appelle λ_i^k, la valeur minimale d'un chemin de x_0 à x_i empruntant au plus k arcs.

Inv: À la fin de la k^e itération, si $P[i] \neq -1$, $\lambda[i]$ est la valeur d'un chemin de x_0 à x_i telle que $\lambda[i] \leq \lambda_i^k$.

L'invariant est vrai avant de rentrer dans la boucle tant que : seul $P[0]$ est $\neq$ de -1 et $\lambda[0] \leqslant \lambda_0^k$

Supposons l'invariant vrai à la fin de la k^e itération et montrons qu'il est encore vrai à la fin de la $(k+1)^e$ itération.

À la $(k+1)^e$ itération de la boucle tant que, les seules modifications des λ ont lieu

Lorsque l'on trouve deux sommet x_i et x_j tels que $\lambda[j] > \lambda[i] + v_{ij}$

On construit un nouveau chemin pour atteindre x_j : celui qui emprunte le chemin de x_0 à x_i qui est de valeur $\lambda[i]$ auquel on ajoute l'arc (x_i, x_j) de valeur v_{ij}.

Par hypothèse $\lambda[i] \leqslant \lambda_i^k$ la valeur d'un chemin de valeur minimale empruntant au plus k arcs.

On ajoute l'arc (x_i, x_j) et on met à jour $\lambda[j]$.

$\lambda[j]$ est donc $\leq$ à la valeur d'un chemin de valeur minimale empruntant au plus $k+1$ arcs.

Ainsi $\lambda[j] \leqslant \lambda_j^{k+1}$ $\Rightarrow$ l'invariant est toujours vrai à la fin de l'itération $k+1$.

Algorithme de FORD : complexité

- **L'invariant est vrai à la fin de la n-1ème itération :**

  A la fin de la n-1ème itération, $\lambda[i]$ est la valeur d'un chemin de x_0 à x_i telle que $\lambda[i] \leq \lambda_i^{n-1}$. Donc $\lambda[i]$ est la valeur d'un chemin de valeur minimale.

  un chemin élémentaire (les seuls à considérer) emprunte au plus n-1 arcs... donc $\underbrace{\lambda_i^*}_{\text{valeur optimale du chemin de } x_0 \text{ à } x_i} = \lambda_i^{n-1}$

⇒ l'algorithme converge en au plus n-1 itérations

- **Complexité** : O(n m)

  complexité d'une itération

- On peut continuer l'algorithme après l'itération n-1. Si les valeurs changent encore, cela indique la présence d'un circuit absorbant.

Algorithme de FORD modifié

```
λ[0] ←0; P[0] ←0; Nb_iterations ←0;
pour i←1 à n-1 faire { λ[i] ← ∞; P[i] ← -1; }
faire {
    modification←faux; Nb_iterations ← Nb_iterations+1;
    pour i←0 à n-1 faire {
        si (P[i]≠-1) alors {
            pour chaque successeurs j de i faire {
                si (λ[j]> λ[i]+v_ij) alors {
                    P[j] ←i;  modification ←vrai;
                    λ[j] ← λ[i]+v_ij;
                }
            }
        }

    }
} tant que (modification=vrai et Nb_iterations<n)
si (Nb_iterations=n) alors écrire(« circuit absorbant ») ;
```