MT94 - Notions sur les systèmes dynamiques

S. Mottelet

Université de Technologie de Compiègne

7 avril 2020

Plan

1. Points d'équilibre

Système autonome : le second membre ne dépend pas explicitement de t

$$X' = f(X),\ t > 0. \tag{S}$$

Définition

Le vecteur X^* est un point d'équilibre de (S) si

$$X(0) = X^* \Rightarrow \forall t > 0,\ X(t) = X^*.$$

Propriété

Les points d'équilibre de (S) sont caractérisés par

$$f(X^*) = 0.$$

$$X' = AX,\ t > 0,$$

$$AX^* = 0 \;\Rightarrow\; X^* \in \operatorname{Ker} A,$$

- Masse-ressort

$$mx'' + kx = 0,$$

- Double intégrateur

$$x'' = 0.$$

- Pendule

$$X' = \begin{pmatrix} X_2 \\ -\frac{g}{L}\sin X_1 \end{pmatrix},\ t > 0,$$

$$X' = f(X),\ t > 0, \tag{S}$$

Definition

Un point d'équilibre X^* du système (S) est stable si

$$\forall R > 0,\ \exists r > 0,\ \forall X(0),\ \|X(0) - X^*\| \leq r \ \Rightarrow\ \forall t > 0,\ \|X(t) - X^*\| \leq R.$$

Definition

Un point d'équilibre X^* qui n'est pas stable est dit instable et on a

$$\exists R > 0,\ \forall r > 0,\ \exists X(0),\ \|X(0) - X^*\| \leq r \text{ et } \exists t > 0,\ \|X(t) - X^*\| > R.$$

Lorsqu'il n'y a qu'un seul point d'équilibre on parle de stabilité du système (S) lui-même.

Quand $n = 2$ ou 3 il est possible d'avoir une idée de la stabilité d'un point d'équilibre à l'aide d'une représentation graphique :

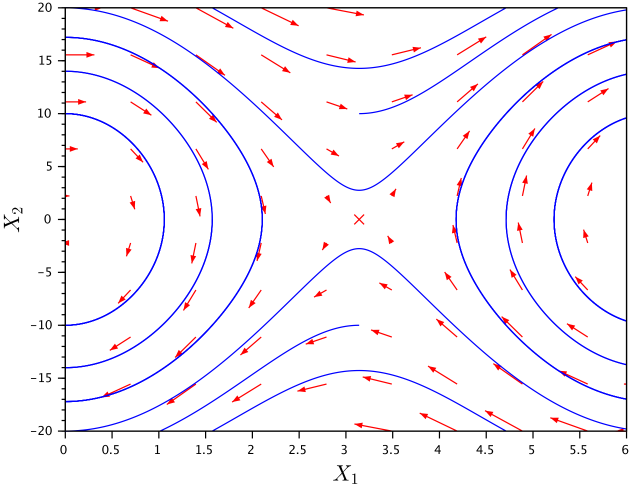
- Portrait de phase

  Un portrait de phase est une représentation géométrique des trajectoires d'un système dynamique dans l'espace des phases : à chaque ensemble de conditions initiales correspond une courbe ou un point.

  On peut superposer aux trajectoires une représentation du champ de vecteurs $X \to f(X)$.

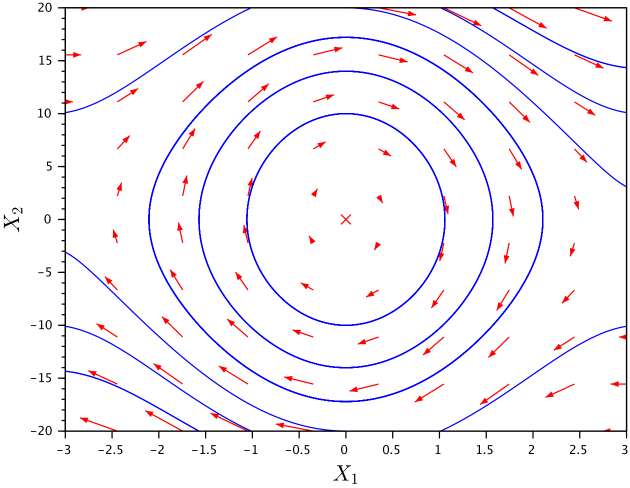
Portrait de phase du pendule centré sur $(\pi, 0)$

$$X' = \begin{pmatrix} X_2 \\ -\frac{g}{L}\sin X_1 \end{pmatrix}.$$



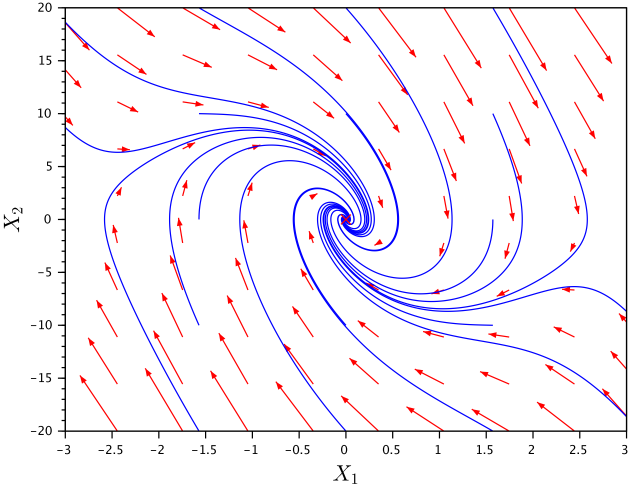
Portrait de phase du pendule centré sur $(0, 0)$

$$X' = \begin{pmatrix} X_2 \\ -\frac{g}{L}\sin X_1 \end{pmatrix}.$$



Portrait de phase du pendule amorti centré sur $(0,0)$

$$X' = \begin{pmatrix} X_2 \\ -\frac{g}{L}\sin X_1 - \alpha X_2 \end{pmatrix}.$$



Définition

Le point d'équilibre X^* est asymptotiquement stable si il est stable et si

$$\exists r > 0,\ \|X(0) - X^*\| < r \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \|X(t) - X^*\| = 0.$$

Propriété

Soit A une matrice $n \times n$ et le système d'équations différentielles linéaires

$$X' = AX,\ t > 0. \tag{SL}$$

Si on note $(\lambda_k)_{k=1\dots n}$ les valeurs propres de A, alors

- $\exists k \in \{1,\dots,n\},\ \mathrm{Re}(\lambda_k) > 0 \quad \Longrightarrow \quad$ (SL) est instable.
- $\forall k \in \{1,\dots,n\},\ \mathrm{Re}(\lambda_k) \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad$ (SL) est stable.
- $\forall k \in \{1,\dots,n\},\ \mathrm{Re}(\lambda_k) < 0 \quad \Longrightarrow \quad$ (SL) est asymptotiquement stable.

Définition

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, on dit que f est différentiable en X^* s'il existe une matrice $f'(X^*)$ tel que

$$f(X^* + h) = f(X^*) + f'(X^*)h + \|h\|\epsilon(h),$$

où $\epsilon(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0.

$\longrightarrow$ $f'(X^*)$ est la matrice des dérivées partielles de $f_1, \ldots, f_m$ par rapport à $X_1, \ldots, X_n$

$$[f'(X^*)]_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial X_j}(X^*).$$

Notion de système linéarisé tangent :

Définition

Soit le système défini par l'équation différentielle autonome

$$X' = f(X),\ t > 0, \tag{S}$$

et X^* un point d'équilibre de ce système. Si f est différentiable en X^*, le linéarisé tangent de (S) en X^* est le système linéaire défini par

$$Z' = f'(X^*)Z,\ t > 0. \tag{SLT$_{X^*}$}$$

Peut-on étudier la stabilité de X^* en étudiant la stabilité de (SLT) ?

Résultats de stabilité dûs à Liapounov :

A. M. Liapounov
6/6/1857 - 3/11/1918

Théorème 1

(SLT$_{X^*}$) stable $\Longleftrightarrow$ X^* est un point d'équilibre stable de (S).

Théorème 2

(SLT$_{X^*}$) asymptotiquement stable $\Longrightarrow$ X^* est un point d'équilibre asymptotiquement stable de (S).

La réciproque du théorème 2 est fausse !

On peut donc déterminer la nature d'un point d'équilibre du système $X' = f(X)$ en calculant les valeurs propres de $f'(X^*)$.

Quelques exemples :

- pendule,
- pendule amorti.
- $x' = -x^2$,

Un attracteur est un sous-espace vers lequel un système évolue de façon irréversible en l'absence de perturbations.

Contrairement aux systèmes linéaires, les systèmes non-linéaires peuvent posséder des attracteurs de types très différents.

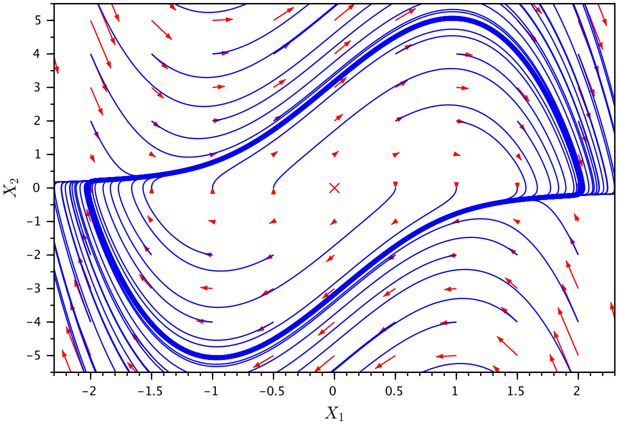
- Equation de Van der Pol

$$x'' - \mu(1 - x^2)x' + x = 0,$$

$$\longrightarrow \text{cycle limite}$$

4. Attracteurs
Equation de Van der Pol

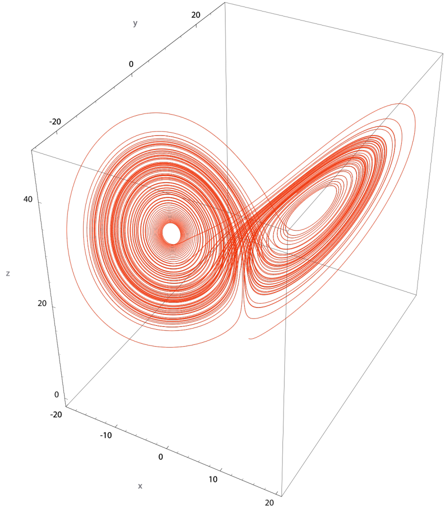
$$x'' - \mu(1 - x^2)x' + x = 0,$$



Système de Lorenz

$$
\begin{aligned}
x' &= \sigma(y - x),\\
y' &= \rho x - y - xz,\\
z' &= xy - \beta z,
\end{aligned}
$$

$\longrightarrow$ attracteur « étrange »



(source : Wikipedia)