RO03
Problèmes d’ordonnancement

- Qu'est ce qu'un problème d'ordonnancement ?
- Résolution d'un problème d'ordonnancement particulier :

  « Minimiser la date de fin d'un projet comportant des contraintes de précédence entre les tâches »

  - utilisation de « graphes conjonctifs »
  - recherche de chemins de valeur maximale
  - Méthode « potentiel - tâche »
  - Méthode « PERT »

Problèmes d'ordonnancement

Un problème d'ordonnancement consiste à déterminer les dates d'exécutions d'activités qui utilisent une ou des quantités connues d'un ensemble donné de ressources dont les capacités sont limitées.

- ✓systèmes de production ;
- ✓transport ;
- ✓emplois du temps d'activités de service ;
- ✓*etc.*

Critères d'optimisation

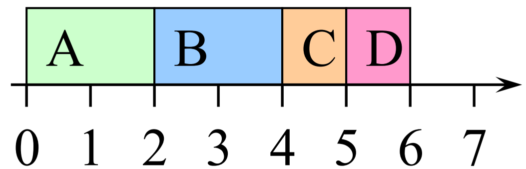
Objectif usuel : minimiser la date de fin du projet.

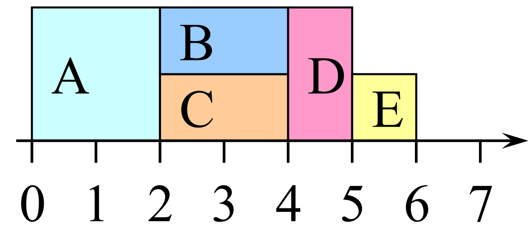
Cependant d'autres critères sont aussi intéressants d'un point de vue industriel :

- ✓ minimisation de la somme pondérée des tâches en retard ;
- ✓ minimisation de la somme (pondérée) des retards ;
- ✓ minimisation de la somme (pondérée) des dates de fin ;
- ✓ *etc.*

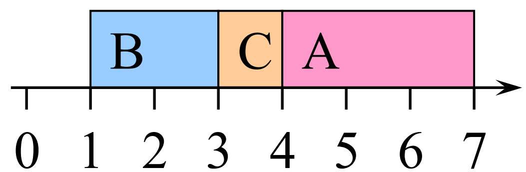
Situations d’ordonnancement

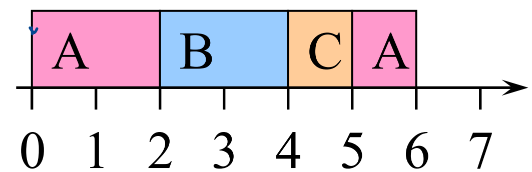
- Ressource disjonctive,
  ressource cumulative ;



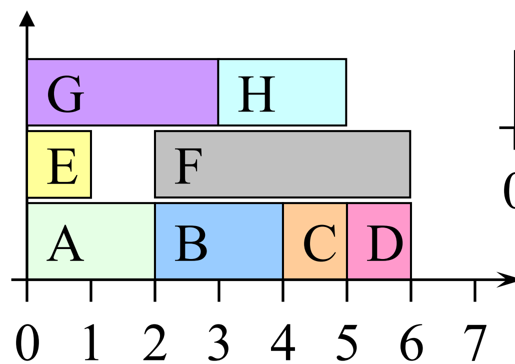


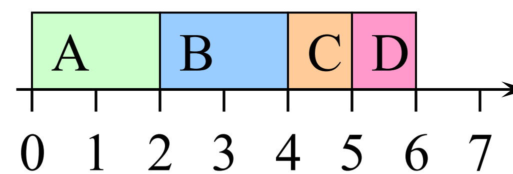
- cas non préemptif,
  cas préemptif ;





- problèmes multi-machines,
  problèmes à une machine.





Exemple de problème d’ordonnancement

Tâche	Durée	Contraintes potentielles
1	3	
2	7	
3	4	La tâche 1 précède la tâche 3
4	6	Les tâches 1 et 2 précèdent la tâche 4
5	5	La tâche 3 précède la tâche 5
6	3	Les tâches 3 et 4 précèdent la tâche 6
7	2	La tâche 6 précède la tâche 7

but : trouver la meilleure organisation possible pour que le projet soit terminé dans les meilleurs délais, et d'identifier les tâches critiques, c'est-à-dire les tâches qui ne doivent souffrir d'aucun retard sous peine de retarder l'ensemble du projet.

Planning à barres (1910, H.L. Gantt)

Tâche	Durée	Contraintes
1	3	
2	7	
3	4	1→3
4	6	(1,2)→4
5	5	3→5
6	3	(3,4)→6
7	2	6→7

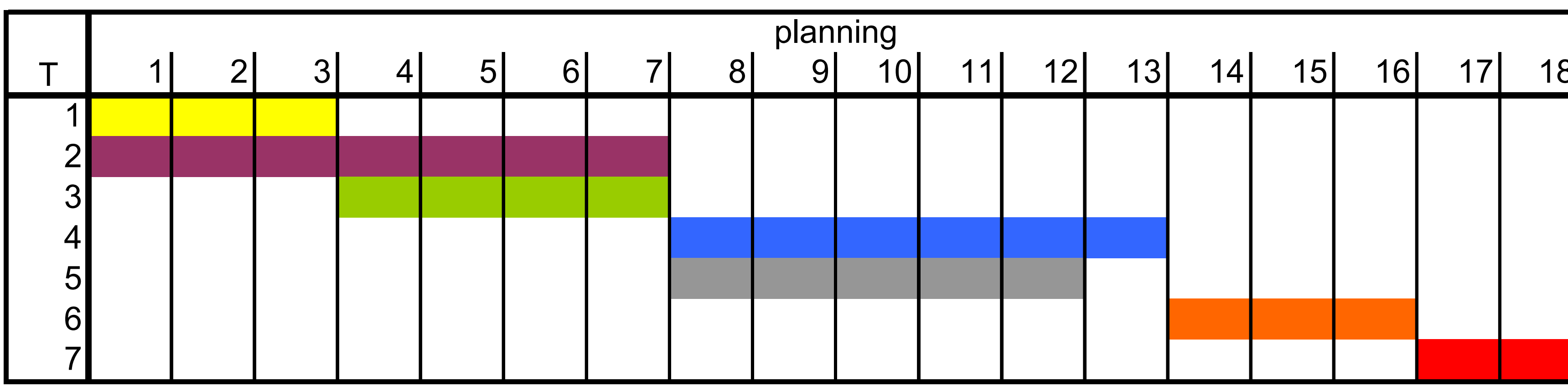
en abscisse :

les unités de temps

en ordonnée :

les différentes tâches

la durée d'exécution d'une tâche est matérialisée par une *barre horizontale*.



Deux méthodes fondées sur les graphes

1958:

- La **méthode potentiel-tâches**,
  à l'occasion de la construction du paquebot FRANCE;
- La méthode **PERT**,
  lors de celle des fusées POLARIS.
  Délai du projet (9000 sous-traitants, 250 fournisseurs) est passé de 7 ans à 4 ans grâce à l'application de la technique du PERT.

Caractéristiques des projets :

De très nombreuses tâches.

Prestige : la fonction coût était donc secondaire.

Objectif principal : terminer le plus tôt possible.

Les méthodes :

Contraintes de succession et de localisation temporelle.

Ne gèrent pas les contraintes de ressources.

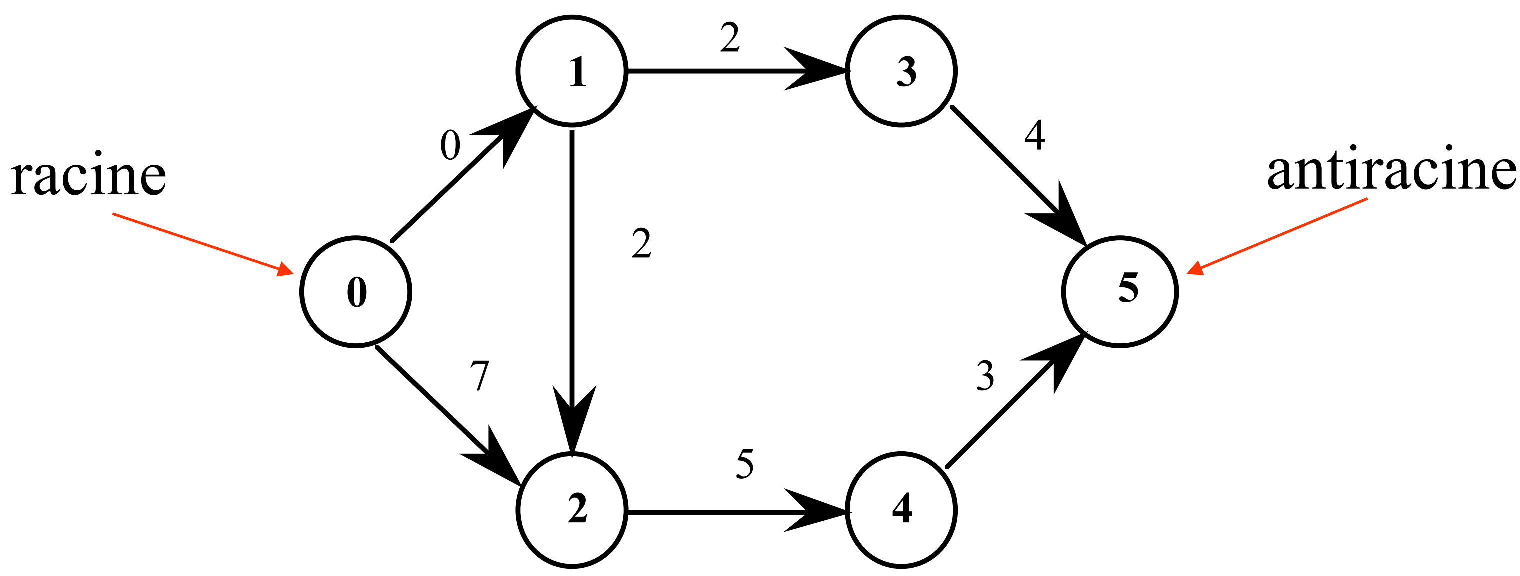
Recherche de chemins maximaux (chemins critiques).

Graphes conjoncfifs

- Les deux méthodes reposent sur la notion de graphe conjonctif.
- Dans ce graphe :
  - les sommets représentent des étapes ou des évènements auxquels on veut associer une date que l'on appelle un potentiel.
  - les arcs représentent des contraintes de précédences entre les dates que l'on veut associer aux sommets.
- Un ordonnancement sera alors un ensemble de potentiels sur le graphe conjonctif, c'est à dire un ensemble de dates associé à chaque sommet.

Graphes conjoncfifs

- Un graphe conjonctif est un graphe valué G = (X, U, v) ayant une racine 0 et une antiracine n+1 tel que :
  - il existe un chemin de valeur positive entre la racine et tout autre sommet
  - il existe un chemin de valeur positive entre tout sommet différent de l'antiracine et l'antiracine.



Ensemble de potentiels

- Un ensemble de potentiels sur un graphe conjonctif $G=(X, U,v)$ est une application $t:X\rightarrow\mathbb{R}$ telle que :
  - $t_0 = 0$,
  - $t_i + v_{ij} \leq t_j$, pour tout arc (i,j) de U.

$T= \{ t_i / i \in X \}$

Existence d'un ensemble de potentiels

- Une condition **nécessaire et suffisante** pour qu'il existe un ensemble de potentiels sur un graphe conjonctif G = (X, U, v) est que ce graphe ne contient **pas de circuit de valeur strictement positive**.

La condition est nécessaire.

En effet, supposons qu'il existe un ensemble de potentiels $T = \{t_i \mid i \in X\}$ et supposons qu'il existe un circuit $\mu = [z_0, \dots, z_k = z_0]$ avec $v(\mu) > 0$.

On a donc $v(\mu) = v_{z_0 z_1} + v_{z_1 z_2} + v_{z_2 z_3} + \dots + v_{z_{k-1} z_k} > 0$.

Or, puisque T est un ensemble de potentiels, $\forall (z_i, z_{i+1}) \in U$ avec $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $t_{z_i} + v_{z_i z_{i+1}} \leq t_{z_{i+1}}$

Ainsi, $\forall i \in \{1, \dots, k-1\}$ $v_{z_i z_{i+1}} \leq t_{z_{i+1}} - t_{z_i}$:

$$
\begin{aligned}
v_{z_0 z_1} &\leq \cancel{t_{z_1}} - t_{z_0} \\
v_{z_1 z_2} &\leq \cancel{t_{z_2}} - \cancel{t_{z_1}} \\
v_{z_2 z_3} &\leq t_{z_3} - \cancel{t_{z_2}} \\
&\vdots \\
v_{z_{k-2} z_{k-1}} &\leq \cancel{t_{z_{k-1}}} - t_{z_{k-2}} \\
v_{z_{k-1} z_k} &\leq t_{z_k} - \cancel{t_{z_{k-1}}} \\
\hline
\underbrace{v_{z_0 z_1} + \dots + v_{z_{k-1} z_k}}_{v(\mu)} &\leq \underbrace{t_{z_k} - \underbrace{t_{z_0}}_{= t_{z_k}}}_{0}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow v(\mu) \leq 0$ d'où une contradiction.

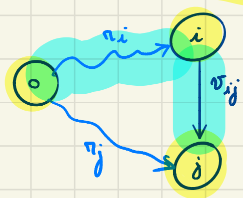
La condition est suffisante

S'il n'y a pas de circuit de valeur strictement positive, alors il existe des chemins de valeur maximale entre le sommet 0 et tout autre sommet $i \in X$.

Soit $\pi_i, i \in X$, la valeur d'un chemin de valeur maximale de 0 à i.

Alors $R = \{\pi_i \mid i \in X\}$ est un ensemble de potentiels.

En effet soit $(i,j) \in U$, si $\pi_i + v_{ij} > \pi_j$ alors π_j ne peut pas être la valeur d'un chemin de valeur maximale de 0 à j.



En effet, cela signifie que l'on peut construire un chemin de valeur $> \pi_j$ pour aller de 0 à j en passant par i.

On a donc nécessairement $\pi_i + v_{ij} \leq \pi_j$ et R est un ensemble de potentiels.

Ensemble particulier de potentiels

- On note **l(i,j)** la valeur **maximale** d'un chemin allant de i à j.

- $R = \{ r_i = l(0,i) \,/\, i \in X \}$ est un ensemble de potentiels.

Propriété

- Pour tout ensemble de potentiels $T = \{t_i \ / \ i \in X\}$, on a $\forall i,\ t_i \geq r_i$.
- En particulier $t_{n+1} \geq t^* = r_{n+1}$.

Pour tout ensemble de potentiels $T = \{t_i \,/\, i \in X\}$, on a
$\forall i,\ t_i \geq r_i$.

En effet, considérons un chemin $\mu = [z_0 = 0, z_1, \dots, z_k = i]$ un chemin de valeur maximale de 0 à i, donc de valeur $v(\mu) = \ell(0,i) = r_i$ et considérons un ensemble de potentiels $T = \{t_i \mid i \in X\}$.

Pour tout arc $(z_j, z_{j+1}),\ j \in \{0, \dots, k-1\}$, on a $t_{z_j} + v_{z_j z_{j+1}} \leq t_{z_{j+1}}$ et donc $v_{z_j z_{j+1}} \leq t_{z_{j+1}} - t_{z_j}$.

Donc

$$v_{z_0 z_1} \leq \cancel{t_{z_1}} - t_{z_0}$$

$$v_{z_1 z_2} \leq \cancel{t_{z_2}} - \cancel{t_{z_1}}$$

$$\vdots$$

$$v_{z_{k-1} z_k} \leq t_{z_k} - \cancel{t_{z_{k-1}}}$$

$$\underbrace{v_{z_0 z_1} + v_{z_1 z_2} + \dots + v_{z_{k-1} z_k}}_{v(\mu) = r_i} \leq \underbrace{\underset{t_i}{\overset{\shortparallel}{t_{z_k}}} - \underset{t_0 = 0}{t_{z_0}}}_{t_i}$$

$$\Rightarrow \boxed{r_i \leq t_i}$$

Potentiels au plus tôt

- r_i est donc dit le potentiel « au plus tôt » pour le sommet i : c'est-à-dire celui avec la plus petite valeur possible.

- **t*** = r_{n+1} est le potentiel au plus tôt du sommet n+1 qui est un descendant de tous les autres sommets : c'est donc le potentiel le plus petit possible pour le sommet qui aura le plus grand potentiel dans le graphe conjonctif.

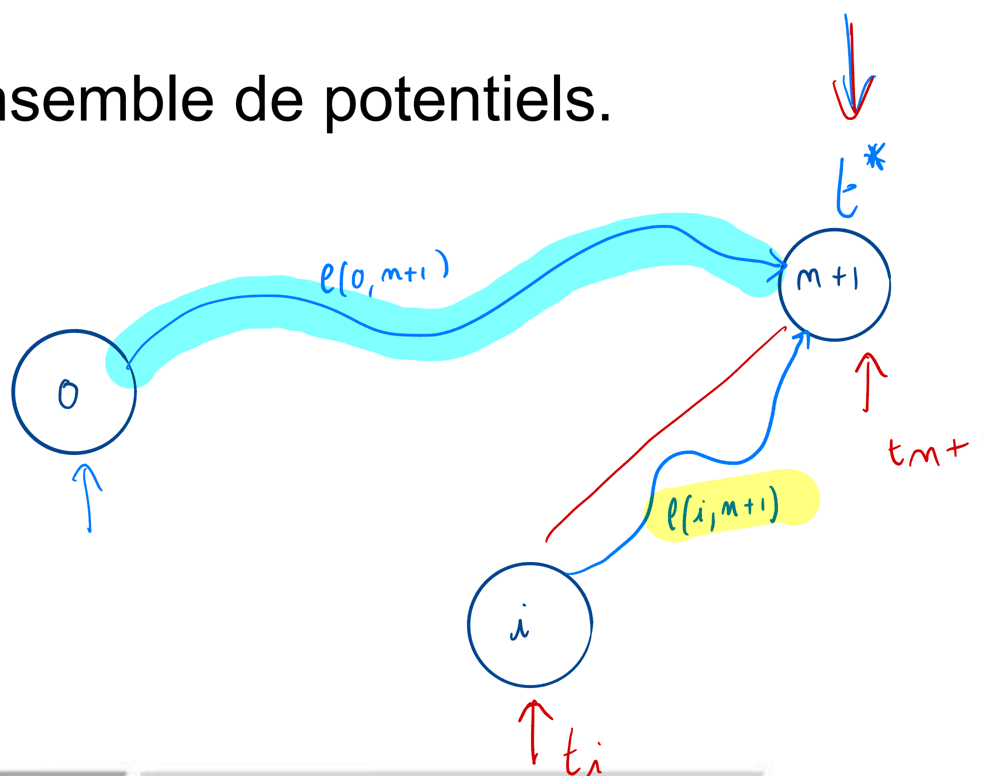
- $R = \{ r_i = l(0,i) \ / \ i \in X \}$ est l'ensemble de potentiels calé à gauche ou au plus tôt.

Autre ensemble particulier de potentiels

- $F = \{ f_i = l(0,n+1) - l(i,n+1) \,/\, i \in X \}$

  $= \{ f_i = \mathbf{t^*} - l(i,n+1) \,/\, i \in X \}$

est un ensemble de potentiels.



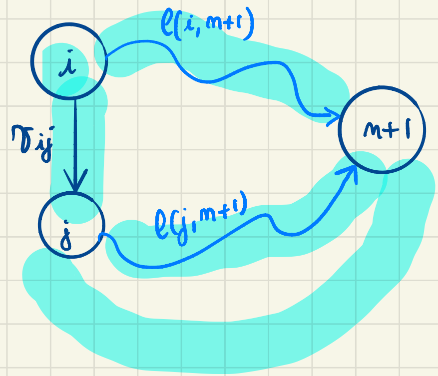
$F = \{ f_i \mid i \in X \}$ avec $f_i = \underbrace{\ell(0, n+1)}_{\pi_{n+1} = t^*} - \ell(i, n+1)$ est un ensemble de potentiels.

En effet, on a $f_0 = \ell(0, n+1) - \ell(0, n+1) = 0$.

De plus $\forall (i,j) \in U \quad f_i + v_{ij} > f_j$ alors

$$\cancel{t^*} - \ell(i, n+1) + v_{ij} > \cancel{t^*} - \ell(j, n+1)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\ell(j, n+1) + v_{ij}} > \underline{\ell(i, n+1)}$$



contredisant le fait que $\ell(i, n+1)$ est la valeur du chemin de valeur maximale de i à $n+1$

(on en trouve un de valeur plus grande en passant par j)

Propriété

- Quelque soit l'ensemble de potentiels $T=\{ti \mid i \in X\}$, avec $t_{n+1}=t^*$ alors $\forall i,\ t_i \leq f_i$.

Quelque soit l'ensemble de potentiels $T=\{ti \,/\, i \in X\}$, avec $t_{n+1}=t^*$ alors $\forall i,\ t_i \leq f_i$.

Soit $T=\{t_i \mid i \in X\}$ un ensemble de potentiels et supposons que $\exists i \in X$ avec $t_i > f_i = t^* - \ell(i,n+1)$

Puisque le sommet $n+1$ est une antiracine, $\exists$ un chemin de valeur maximale $\mu = [z_0 = i, \dots, z_k = n+1]$ de i à $n+1$ et de valeur $\ell(i,n+1)$.

On a $\forall j \in \{0,\dots,k-1\}$ $t_{z_j} + v_{z_j z_{j+1}} \leq t_{z_{j+1}} \Leftrightarrow v_{z_j z_{j+1}} \leq t_{z_{j+1}} - t_{z_j}$

Ainsi

$$v_{z_0 z_1} \leq \cancel{t_{z_1}} - t_{z_0}$$

$$v_{z_1 z_2} \leq \cancel{t_{z_2}} - \cancel{t_{z_1}}$$

$$\vdots$$

$$v_{z_{k-1} z_k} \leq t_{z_k} - \cancel{t_{z_{k-1}}}$$

$$\underbrace{v_{z_0 z_1} + \dots + v_{z_{k-1} z_k}}_{\ell(i,n+1)} \leq \underbrace{t_{z_k}}_{t_{n+1} = t^*} - \underbrace{t_{z_0}}_{t_i}$$

$\Rightarrow \ell(i,n+1) \leq t^* - t_i \Leftrightarrow t_i \leq t^* - \ell(i,n+1)$

contredisant $t_i > t^* - \ell(i,n+1)$

Potentiels au plus tard

Pour tout ensemble de potentiels $T = \{ t_i \mid i \in X \}$
avec $t_{n+1} = t^*$ alors $t_i \leq f_i$.

- f_i est le potentiel au plus tard (c'est-à-dire celui avec la plus grande valeur possible) pour le sommet i sous la contrainte que $f_{n+1} = \mathbf{t^*}$.

- $F = \{ f_i = \mathbf{t^*} - l(i,n+1) \ / \ i \in X \}$ est l'ensemble de potentiels calé à droite ou au plus tard.

La méthode potentiel-tâches

- On associe au problème d'ordonnancement un graphe G = (X , U, v) où
- X = {0, 1, 2, ... , n, n+1}   (0 et n +1: tâches fictives)
- U est associée aux contraintes potentielles:
  - contraintes de précédences initiales :

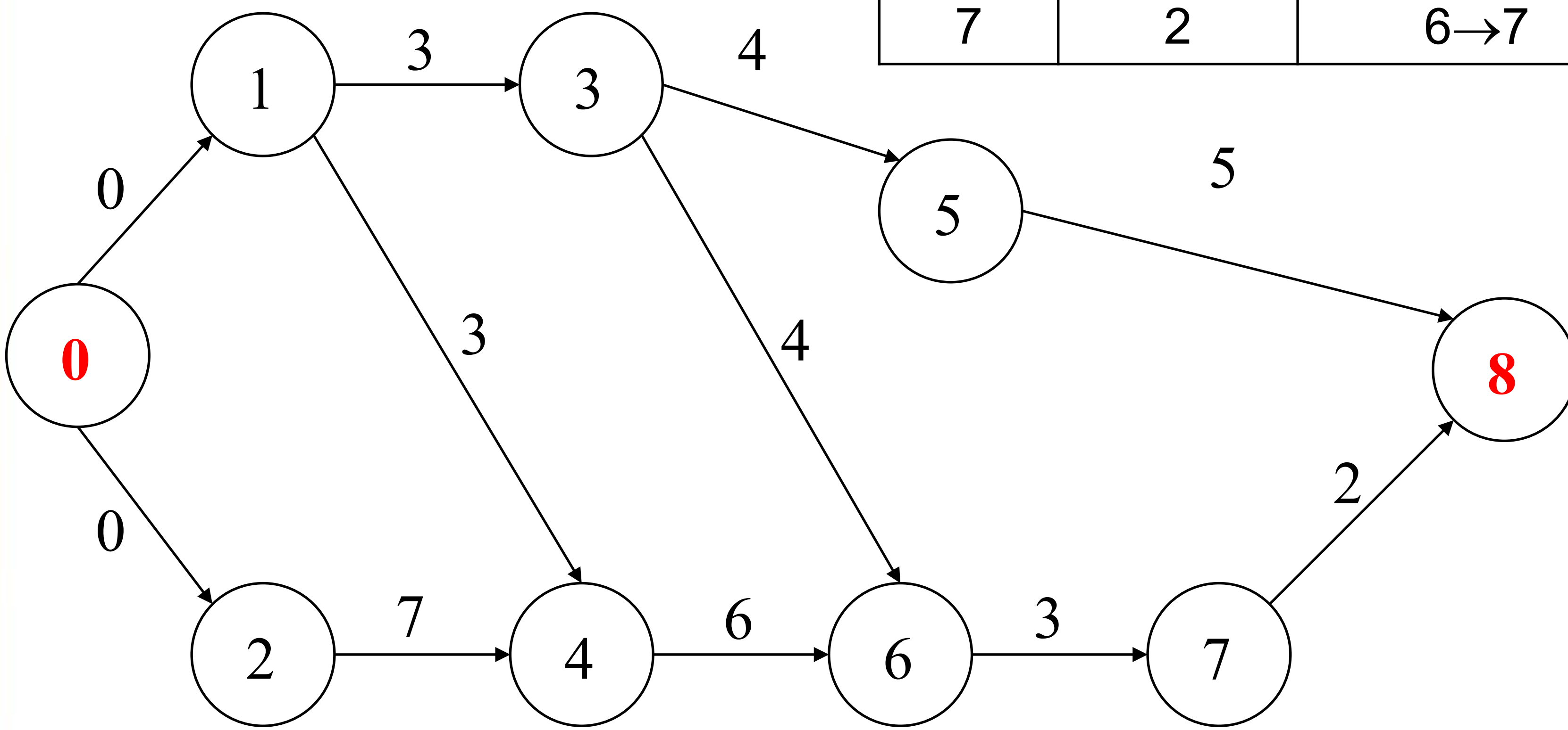
    si i→j alors on ajoute l'arc (i,j) valué par la durée de i.

les contraintes dues aux tâches 0 et n+1 :

- on relie tout sommet sans prédécesseur à 0 par un arc de valuation 0
- on relie tout sommet i sans successeur à n+1 par un arc de valuation égale à la durée de la tâche i.

Exemple

Tâche	Durée	Contraintes
1	3	
2	7	
3	4	1→3
4	6	(1,2)→4
5	5	3→5
6	3	(3,4)→6
7	2	6→7



Propriétés

- Pour tout ensemble de potentiels $T= \{t_i \ / \ i \in X\}$, on a $t_{n+1} \geq t^*$.
- $\forall i, \ r_i \leq t_i$
- Si $t_{n+1} = t^*$, alors $\forall i, \ t_i \leq f_i$

- Le problème d'ordonnancement étudié peut se représenté comme un graphe conjonctif.
- t_i représente la date de début de la tâche i.
- t^* est la durée optimale de l'ordonnancement.
- $\forall i, \ r_i \leq t_i$ (r_i : date au plus tôt).
- Si T est un ordonnancement optimal (de durée t^*), alors $t_i \leq f_i$ (f_i : date au plus tard).

Ordonnancement

- Un ordonnancement (dates de démarrages) est un ensemble de potentiels sur le graphe conjonctif associé.
- Tout ordonnancement est de durée supérieure à l(0,n+1) = t*.
- On calcule le plus souvent, les ordonnancements au plus tôt et au plus tard, en résolvant deux problèmes de cheminements: r_i = l(0, i) , f_i = l(0,n+1) - l(i,n+1).
- On peut utiliser BELLMAN en l'absence de circuit ou FORD, s'il y a un circuit, en utilisant les formules suivantes.

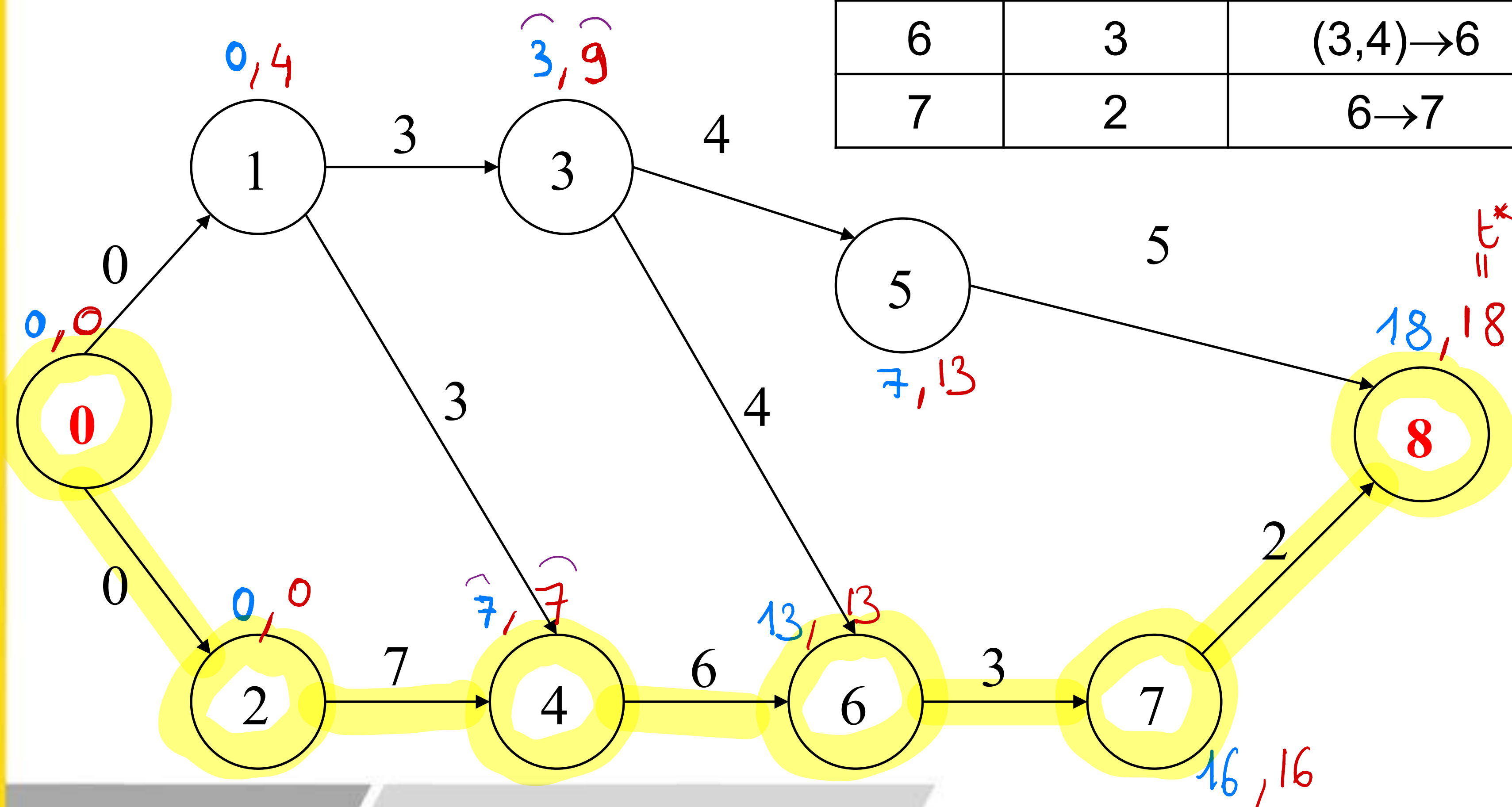
dates au plus tôt : $r_0 = 0$, $r_j = \max_{i \in U^-(j)} (r_i + v_{ij})$.

dates au plus tard : $f_{n+1} = t^*$, $f_i = \min_{j \in U^+(i)} (f_j - v_{ij})$.

Exemple

$t_i \in [r_i, f_i]$

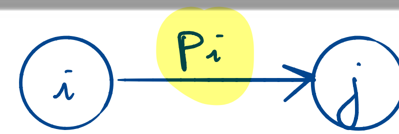
Tâche	Durée	Contraintes
1	3	
2	7	
3	4	1→3
4	6	(1,2)→4
5	5	3→5
6	3	(3,4)→6
7	2	6→7



Chemins critiques

- Les chemins maximaux entre 0 et n+1 sont dits chemins critiques.
- Les tâches appartenant à ce chemin critique sont dites tâches critiques.
- Si on retarde d'un certain délai une tâche critique, l'ordonnancement sera retardé du même délai.
- Les tâches critiques ont **des « dates au plus tard » égales aux « dates au plus tôt »** : elles sont de marge nulle.

Les différents types de contraintes potentielles



- <u>Contraintes de succession :</u>

  i précède j : $t_i + p_i \leq t_j$

  On associe un arc (i,j) valué par pi.

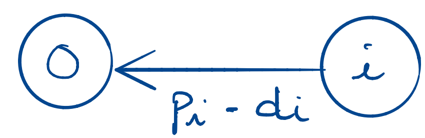
- <u>Contraintes de localisation temporelle :</u>

  i est disponible à la date a_i : $t_i \geq a_i$ ou $t_0 + a_i \leq t_i$ ($t_0 = 0$).

  On associe un arc (0,i) valué par a_i.

  i doit être achevée à la date d_i : $t_i + p_i \leq d_i$, (ou $t_i + p_i - d_i \leq t_0$)

  On associe un arc (i,0) valué par $p_i - d_i$ (≤ 0).



- <u>Contraintes de succession au sens large :</u>

  j pourra débuter après la tâche i plus un temps de réglage r_{ij} :

  $t_i + p_i + r_{ij} \leq t_j$

  j pourra commencer après que i soit commencée d'un tiers :

  $t_i + p_i/3 \leq t_j$

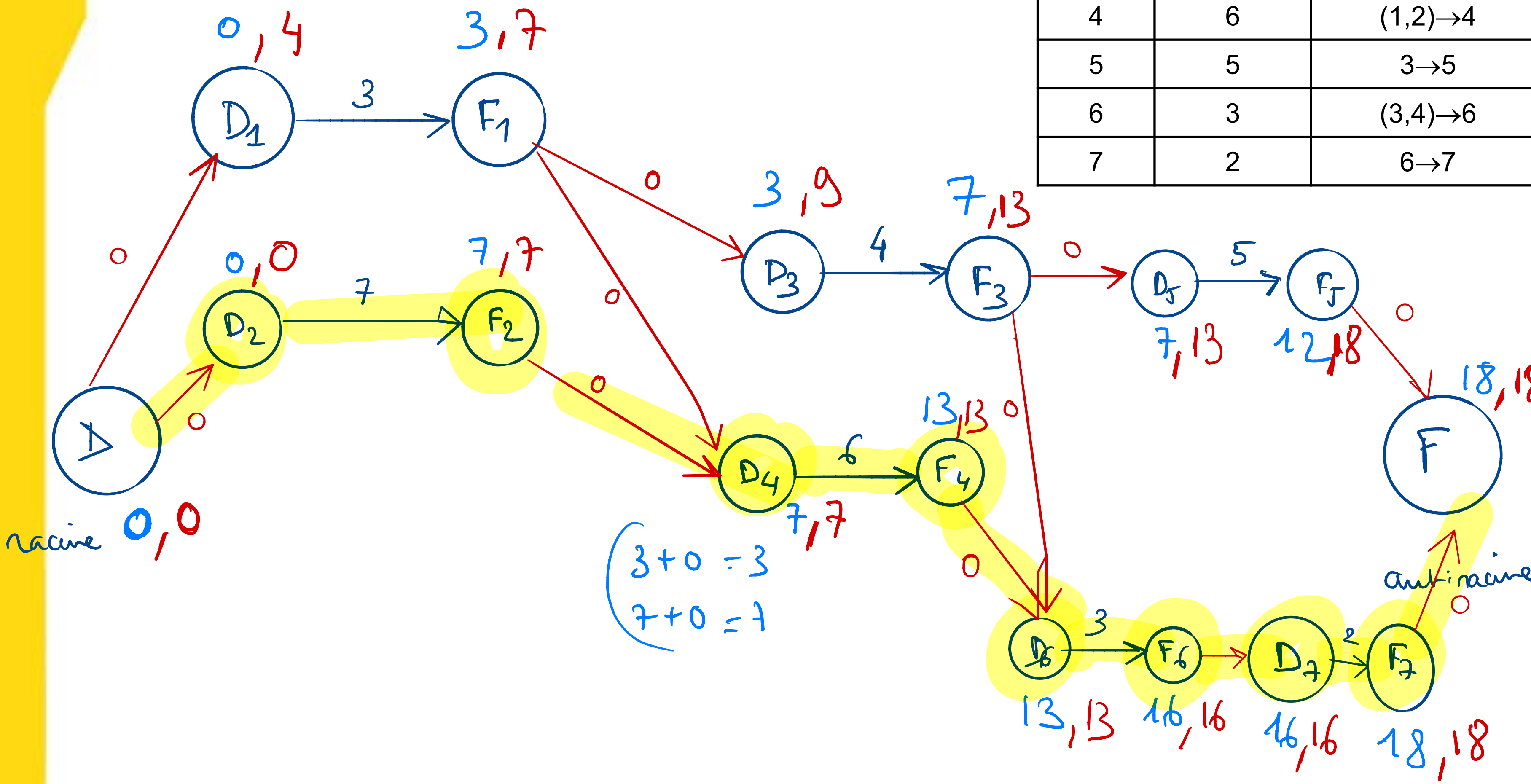
  etc.

Graphe PERT

- **P**roject **E**valuation and **R**eview **T**echnique
- Pour chaque tâche i :
  - un événement D_i : début de la tâche i
  - un événement F_i : fin de la tâche i
- un événement D : début de l'ordonnancement
- un événement F : fin de l'ordonnancement
- Le graphe conjonctif associé :
  - sommets : l'ensemble des événements (étapes)
  - arcs :
    - l'ensemble des tâches : arcs (D_i , F_i) valués par les durées des tâches.
    - des **arcs fictifs** (tâches fictives) permettant de représenter les contraintes de précédence : si $i \rightarrow j$ alors on ajoute l'arc (F_i, D_j) valué par 0.

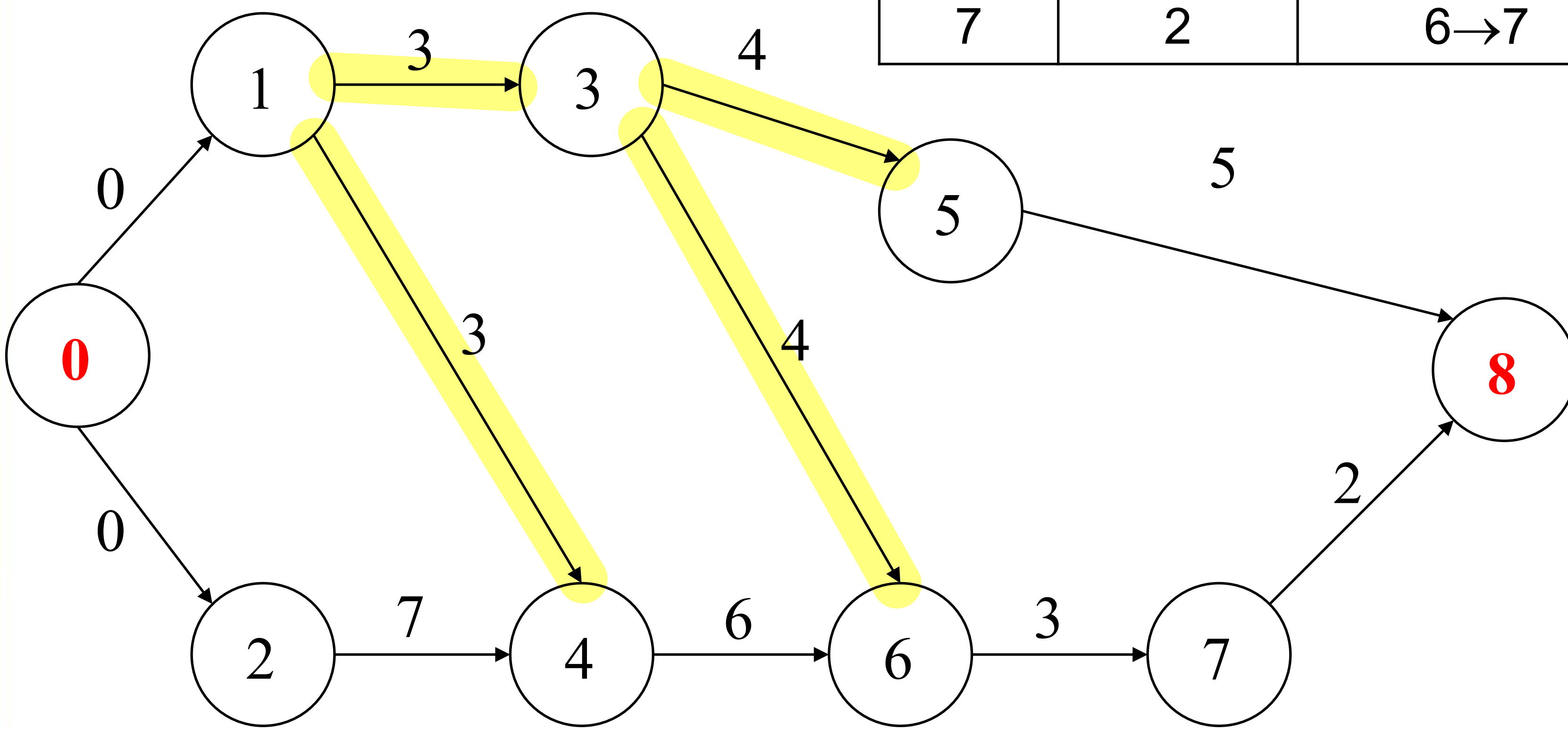
Exemple

Tâche	Durée	Contraintes
1	3	
2	7	
3	4	1→3
4	6	(1,2)→4
5	5	3→5
6	3	(3,4)→6
7	2	6→7



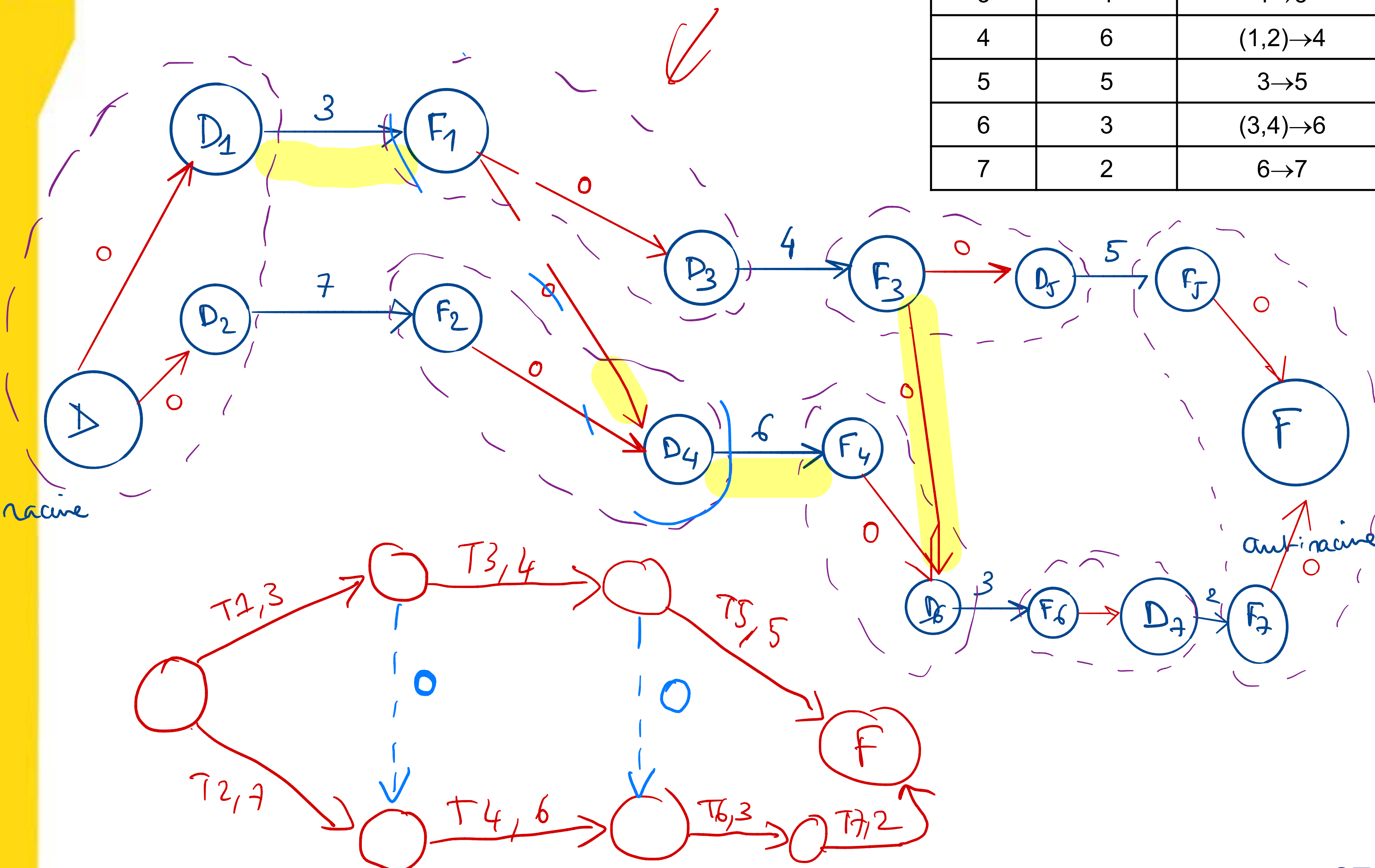
Exemple

Tâche	Durée	Contraintes
1	3	
2	7	
3	4	1→3
4	6	(1,2)→4
5	5	3→5
6	3	(3,4)→6
7	2	6→7



Exemple

Tâche	Durée	Contraintes
1	3	
2	7	
3	4	1→3
4	6	(1,2)→4
5	5	3→5
6	3	(3,4)→6
7	2	6→7



Graphe PERT simplifié

- Des événements début ou fin de tâches sont fusionnés.
- inconvénients :
  - la non-automaticité de sa construction;
  - le fait qu'il n'est pas unique;
  - le fait que si on modifie une contrainte (ajout ou retrait), il faut reconstruire tout le graphe simplifié.
- avantage :
  - meilleure lisibilité pour des non-spécialistes (une tâche qui a une certaine durée est représentée par une seule “flèche”)

Exemple

Tâche	Durée	Contraintes
1	3	
2	7	
3	4	1→3
4	6	(1,2)→4
5	5	3→5
6	3	(3,4)→6
7	2	6→7