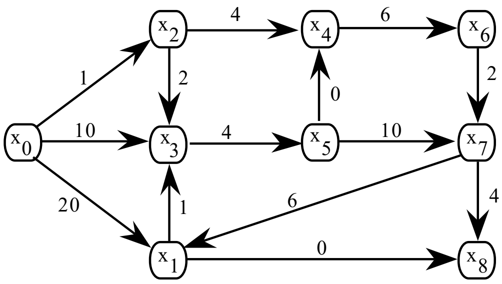
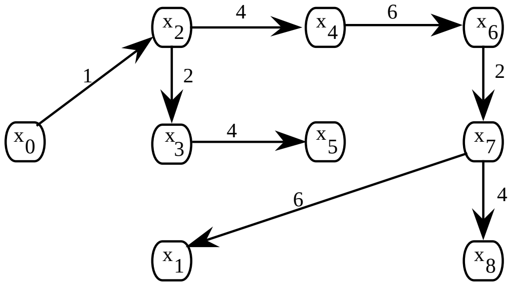
Correction du TD n°9

Exercice

DIJKSTRA oui car $v_{ij} \geq 0$ et BELLMAN non car circuit x_3, x_5, x_7, x_1





	λ0	λ1	λ2	λ3	λ4	λ5	λ6	λ7	λ8
X0	**0**	20	**1**	10	∞	∞	∞	∞	∞
X2	0	20	1	**3**	5	∞	∞	∞	∞
X3	0	20	1	3	5	**7**	∞	∞	∞
X4	0	20	1	3	5	7	**11**	∞	∞
X5	0	20	1	3	5	7	11	17	∞
X6	0	20	1	3	5	7	11	**13**	∞
X7	0	19	1	3	5	7	11	13	**17**
X8	0	19	1	3	5	7	11	13	17
X1	0	19	1	3	5	7	11	13	17

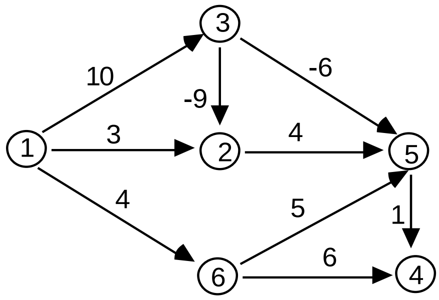
il y a unicité des chemins minimaux car les arcs de l'arborescence sont les seuls arcs (i, j) tel que $\lambda j - \lambda i = v_{ij}$ (corollaire 1 du théorème du cours, polycopié page 56).

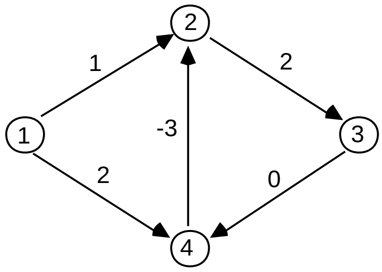
En fait avec les arcs qui satisfont la propriété du corollaire 1 ce sont les seuls qui peuvent participer à la construction des plus courts chemins. Clairement, les arcs déjà présents dans l'arborescence obtenue à la fin de l'algorithme de Dijkstra satisfont cette propriété, mais dans le cas de l'exercice 1 ce sont les seuls arcs car aucun des autres arcs ne satisfait pas $\lambda j - \lambda i = v_{ij.}$ On en conclut donc qu'il y a unicité car avec les arcs qui satisfont la propriété on peut construire une arborescence unique, d'où l'unicité des chemins.

Problème : Q1 et Q2 applications de l'algorithme de DIKJSTRA :

S	$\lambda 1$	$\lambda 2$	$\lambda 3$	$\lambda 4$	$\lambda 5$	$\lambda 6$
1	**0**	**3**	**10**	∞	∞	**4**
1,2	0	3	10	∞	**7**	4
1,2,6	0	3	10	10	7	4
1,2,6,5	0	3	10	**8**	7	4
1,2,6,5,4	0	3	10	8	7	4
1,2,6,5,4,3	0	3	10	8	7	4

S	$\lambda 1$	$\lambda 2$	$\lambda 3$	$\lambda 4$
1	**0**	**1**	∞	**2**
1,2	0	1	**3**	2
1,2,4	0	1	3	2
1,2,4,3	0	1	3	2





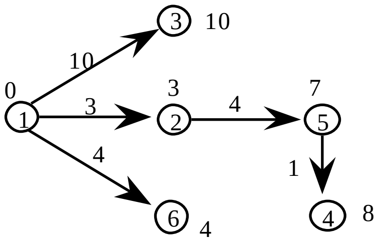


Figure 1

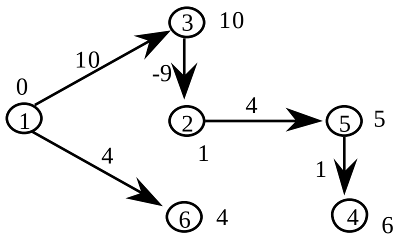


Figure 2

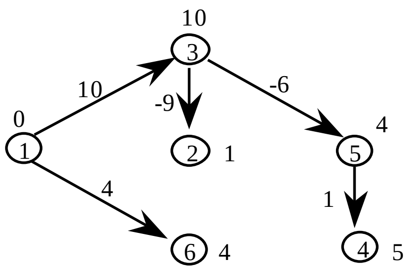


Figure 3

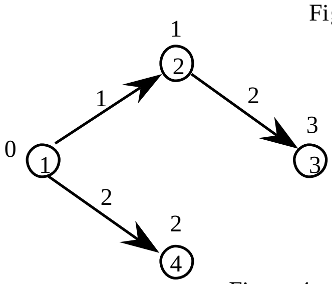


Figure 4

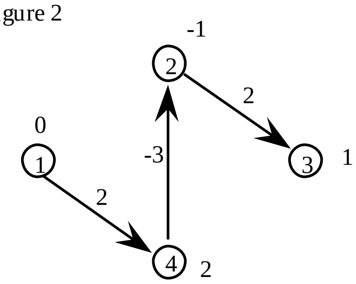


Figure 5

Q1 : Etape B : Cf figure 1.

Etape C : l'arc (3, 2) ajouté à l'arborescence crée un cycle qui n'est pas un circuit et λ_2 - λ_3 = 3 - 10 = -7 > -9. Donc diminuer de -7 - (-9) = 2 les valeurs des chemins pour 2 et ces descendants.

Etape D : Cf figure 2.

Etape C : l'arc (3, 5) ajouté à l'arborescence crée un cycle qui n'est pas un circuit et λ_5 - λ_3 = 5 - 10 = -5 > -6. Donc diminuer de -5 - (-6) = 1 les valeurs de s chemins pour 5 et ces descendants.

Etape D : Cf figure 3.

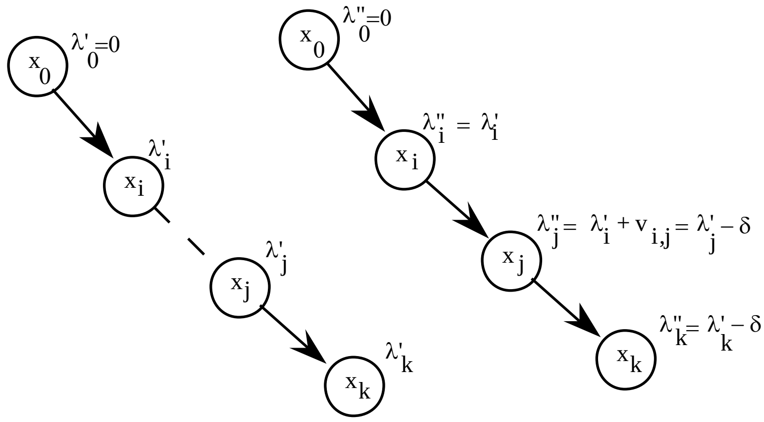
Etape C : on s'arrête en FIN1 car tous les arcs (i, j) sont tel que $\lambda_j - \lambda_i \leq v_{ij}$.

Q2 : Etape B : Cf figure 4.

Etape C : l'arc (4, 2) ajouté à l'arborescence crée un cycle qui n'est pas un circuit et λ_2 - λ_4 = 1 - 2 = -1 > -3. Donc diminuer de -1 - (-3) = 2 les valeurs de s chemins pour 2 et ces descendants.
Etape D : Cf figure 5.
Etape C : l'arc (3,4) ajouté à l'arborescence crée un circuit donc FIN2. C'est un circuit absorbant (2,3,4,2) de valeur -1

Q3 :
La propriété est vraie au premier passage dans C. En effet nous avons vu en cours que l'arborescence ainsi construite est une arborescence de chemins minimaux. On peut aussi le démontrer de la façon suivante : après avoir appliqué DIJKSTRA, $\lambda_1 = 0$ et pour tout sommet j, par construction on a $\lambda_j = \lambda_i + v_{ij}$ où (i, j) est un arc marqué. Donc en remontant jusqu'à la racine de l'arborescence et en notant ($x_0 = 1, ..., x_r = k$) le chemin de l'arborescence allant de 1 à k on a : $\lambda_{x_0} = 0$, $\lambda_{x_1} = \lambda_{x_0} + v_{x_0, x_1}$, ..., $\lambda_{x_r} = \lambda_{x_{r-1}} + v_{x_{r-1}, x_r}$ d'où après avoir fait la somme des deux côtés on obtient : $\lambda_{x_r} - \lambda_{x_0} = \lambda_{x_r} = v_{x_0, x_1} + ... + v_{x_{r-1}, x_r}$ c'est-à-dire la valuation du chemin de l'arborescence allant de 1 à k. On en déduit aussi que la valeur de tout sous-chemin de l'arborescence de x_p à x_r sera de valeur $\lambda_{x_r} - \lambda x_p$.

Q4. Elle reste vraie quand on modifie l'arborescence :
Supposons la vraie par hypothèse de récurrence avant modification de l'arborescence. Si le sommet x_k n'est pas un descendant de x_j, elle reste vraie après modification car la modification ne concerne pas le chemin allant de x_0 à x_k. Sinon, x_k est un descendant de x_j. Notons λ'_k la valeur des λ_k avant modification et λ''_k leurs valeur après modification :



Après modification de l'arborescence, le chemin allant de x_0 à x_k se décompose en trois :
- un chemin allant de x_0 à x_i de valeur λ'_i;
- l'arc (x_i, x_j) de valeur $v_{i,j}$;
- un chemin allant de x_j à x_k de valeur $\lambda'_k - \lambda'_j$.
Par construction $\lambda''_j = \lambda'_i+v_{i,j}$ et $\lambda''_k-\lambda''_j = \lambda'_k-\lambda'_j$ ($\lambda''_k = \lambda'_k-\delta$); λ''_k est alors toujours la valeur du chemin allant de x_0 à x_k dans la nouvelle arborescence.

Q5 : Si l'arc (x_i, x_j) crée un circuit, il y a un chemin de l'arborescence allant de x_j à x_i. D'après 3, ce chemin est de valeur λ_i-λ_j. En concaténant ce chemin avec l'arc (x_i, x_j) on obtient un circuit de valeur λ_i-λ_j+$v_{i,j}$ donc strictement négatif. Le cicruit est absorbant. Il n'y a donc pas de chemin minimaux.

Q6 :

En l'absence de circuit absorbant, il existe des valeurs minimales λ_i^* pour les λ_i. Notons λ_i^0 la valeur des λ_i à la fin de DIKJSTRA (les λ_i^0 sont finis dès que x_0 est racine). L'algorithme s'arrête en un nombre fini d'itérations. A chaque itération, au moins un λ_i diminue tout en restant supérieur ou égal à λ_i^* (d'après Q4). λ_i est la valeur d'un chemin allant de x_0 à x_i; le nombre d'itérations est majoré par $\sum_i (\lambda_i^0 - \lambda_i^*)$.

Enfin, FIN 1 correspond à l'arrêt de l'algorithme quand l'arborescence des plus court chemin est obtenue. Il suffit de remarquer que les valeurs de λ obtenus à la FIN 1 satisfont les CNS du

Théorème 1 :

Soit G un graphe sans circuit de valeur strictement négative et λ_i des valeurs de chemins entre x_0 et x_i. Une condition nécessaire et suffisante pour que ces $\{\lambda_i / 0 \leq i \leq n\text{-}1\}$ soient l'ensemble des valeurs des chemins minimaux issus de x_0 est que :

1°) $\lambda_0 = 0$;

2°) $\lambda_j - \lambda_i \leq v_{ij}$, pour tout arc $(x_i, x_j) \in U$.

Par conséquent, les valeurs λ donnent les valeurs des plus courts chemins, ce qui valide la FIN 1.