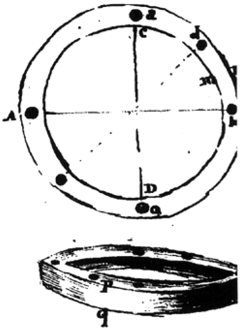
Introduction à l'analyse de Fourier

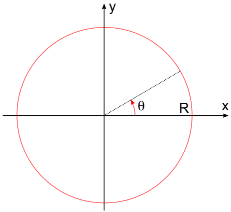
S. Mottelet

Université de Technologie de Compiègne

L'expérience de Fourier

Modèle mathématique, Théorie analytique de la chaleur, 1822





Un anneau de métal est chauffé à blanc à l'aide d'une flamme placée sous sa section à $\theta = 0$. L'anneau est ensuite placé dans le sable et on observe sa température en fonction du temps.

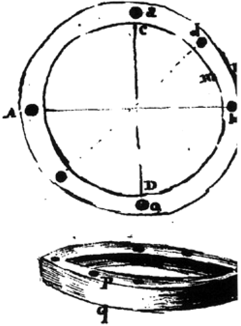
On suppose que la température est uniforme dans la section et ne dépend que de θ et t, on la note $u(\theta, t)$.

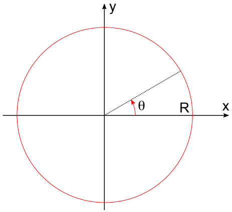
Le bilan énergétique donne l'équation aux dérivées partielles

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\lambda}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,\ \theta \in]-\pi, \pi[,\ t > 0.$$

L'expérience de Fourier

Modèle mathématique, Théorie analytique de la chaleur, 1822





La symétrie impose $u(\theta, t) = u(-\theta, t)$, et si on note $f(\theta)$ la température à $t = 0$, on peut écrire ainsi le système complet :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,\ \theta \in]0, \pi[,\ t > 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(0, t) = 0,\ t > 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(\pi, t) = 0,\ t > 0, \qquad (3)$$

$$u(\theta, 0) = f(\theta),\ \theta \in [0, \pi], \qquad (4)$$

où on a noté $d = \frac{\lambda}{c\rho R^2} > 0$.

L'expérience de Fourier

Modèle mathématique, résolution de l'équation

On résout tout d'abord

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,\ \theta \in]0,\pi[,\ t > 0, \tag{1}$$

sans tenir compte de la condition initiale et en cherchant u à variables séparées,

$$u(\theta,t) = g(\theta)h(t).$$

$$\begin{aligned}
(2,3) &\Rightarrow g'(0) = g'(\pi) = 0, & \\
(1) &\Leftrightarrow g(\theta)h'(t) - dg''(\theta)h(t) = 0, & \forall\theta \in]0,\pi],\ \forall t > 0, \\
&\Leftrightarrow \frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = \frac{1}{d}\frac{h'(t)}{h(t)}, & \forall\theta \in]0,\pi],\ \forall t > 0.
\end{aligned}$$

Les deux termes dépendent de variables différentes il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = a = \frac{1}{d}\frac{h'(t)}{h(t)}.$$

L'expérience de Fourier

Modèle mathématique, résolution de l'équation

L'équation $\frac{1}{d}\frac{h'(t)}{h(t)} = a$ donne directement $h(t) = C\exp(adt)$ donc $a \leq 0$

- $a = 0$

$$\begin{aligned} g''(\theta) = 0 \Rightarrow g(\theta) = \alpha + \beta\theta, &\text{ avec } \beta = 0, \\ h'(t) = 0 \Rightarrow h &\text{ constante} \end{aligned}$$

Première solution : $u(\theta, t) = \alpha$, $\forall\theta$, $\forall t$.

- $a < 0$: posons $a = -\omega^2$, avec $\omega > 0$.

$$g'' + \omega^2 g = 0 \Rightarrow g(\theta) = \alpha \cos \omega\theta + \beta \sin \omega\theta, \text{ avec } \beta = 0.$$

La condition au bord $g'(\pi) = 0$ impose $-\alpha\omega \sin \omega\pi = 0$, donc $\omega = n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
Donc $g(\theta) = \alpha \cos n\theta$ est solution pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On en déduit $h(t) = C \exp(-dn^2 t)$ et une famille de solutions de $(1, 2, 3)$

$$u_n(\theta, t) = \alpha_n \cos(n\theta) \exp(-dn^2 t),$$

où α_n est une constante arbitraire et n un entier naturel.

- Ajout de la condition initiale :

  On cherche u solution de (1,2,3,4) sous la forme d'une série

$$u(\theta, t) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \cos(n\theta) \exp(-dn^2 t).$$

  Par linéarité u est solution de (1,2,3) et pour $t = 0$ on a l'équation

$$u(\theta, 0) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \cos(n\theta) = f(\theta), \ \forall \theta \in [0, \pi].$$

La convergence de cette série et le sens de l'égalité entre f et sa limite sont l'objet de l'analyse de Fourier !

L'expérience de Fourier

Modèle mathématique, résolution de l'équation

En supposant que la série

$$f(\theta) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n \cos(n\theta)$$

converge, on peut procéder formellement et calculer α_0 : comme $\int_0^\pi \cos(n\theta)\, d\theta = 0$ pour $n > 0$, on obtient

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\theta)\, d\theta,$$

c'est la température moyenne.

Remarque : on a

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi u(\theta,t)\, d\theta = \frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 0} \alpha_n \exp(-dn^2 t)\int_0^\pi \cos(n\theta)\, d\theta = \alpha_0,$$

la température moyenne ne dépend pas de t !

L'expérience de Fourier

Modèle mathématique, résolution de l'équation

En supposant que la série

$$f(\theta) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \cos(n\theta)$$

converge, on peut procéder formellement et calculer α_k pour $k > 0$: on multiplie l'égalité par $\cos(k\theta)$ et on intègre :

$$\int_0^\pi f(\theta) \cos(k\theta)\, d\theta = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(k\theta)\, d\theta.$$

Comme $\int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(k\theta)\, d\theta = 0$ pour $n \neq k$, on obtient

$$\int_0^\pi f(\theta) \cos(k\theta)\, d\theta = \alpha_k \int_0^\pi \cos^2(k\theta)\, d\theta,$$

et comme pour $k > 0$, $\int_0^\pi \cos^2(k\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\alpha_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\theta) \cos(k\theta)\, d\theta.$$

Exemple pour $0 < \lambda < \pi$:

$$f(\theta) = \begin{cases} 1 - \left|\frac{\theta}{\lambda}\right|, & \text{si } \theta \in [-\lambda, \lambda], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\lambda (1 - \tfrac{\theta}{\lambda})\, d\theta = \tfrac{\lambda}{2\pi},$$

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\lambda (1 - \tfrac{\theta}{\lambda}) \cos(n\theta)\, d\theta = \tfrac{2(1-\cos(n\lambda))}{\pi\lambda n^2}$$

La série $\dfrac{\lambda}{2\pi} + \dfrac{2}{\lambda\pi}\displaystyle\sum_{n>0} \dfrac{1-\cos(n\lambda)}{n^2}\cos(n\theta)$ converge-t-elle vers f ?

L'analyse de Fourier lui permet d'expliquer ce qu'il observe :

« *en mesurant la température en fonction du temps en différents points de l'anneau, son état ne tarde pas à se confondre avec celui pour lequel les écarts de température des différents points par rapport à la moyenne sont proportionnels au cosinus de l'angle qui mesure la distance à l'origine, la disposition initiale n'apportant aucun changement à ces résultats* »

En effet, si on néglige les termes pour $n \geq 2$, on a

$$u(\theta, t) \approx \alpha_0 + \alpha_1 \cos\theta \exp(-dt).$$

Exemple pour $0 < \lambda < \pi$:

$$f(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{si } \theta \in [-\lambda, \lambda], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda d\theta = \frac{\lambda}{\pi},$$

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\lambda \cos(n\theta)\, d\theta = \frac{2}{\pi n} \sin(n\lambda).$$

La série $\frac{\lambda}{\pi} + \sum_{n>0} \frac{2}{\pi n} \sin(n\lambda) \cos(n\theta)$ converge-t-elle vers f ?

Séries de Fourier

Résultats et notions essentielles

Les travaux de Fourier sur l'équation de la chaleur ont donné naissance à une branche des mathématiques appliquées dédiée à l'approximation des fonctions par des séries. Les applications sont multiples, par exemple la compression de signal (son, image, etc.).

Définition

On appelle polynôme trigonométrique ou série de Fourier une fonction périodique de période T définie par

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x),\ \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

La convergence de cette série de fonctions doit être définie de manière rigoureuse.

Soit (f_n) une suite de fonctions $f_n : E \to \mathbb{R}$ définies sur un ouvert $E \subset \mathbb{R}$. La convergence de (f_n) vers une limite $f : E \to \mathbb{R}$ peut être définie de différentes manières :

Définitions

On dit que (f_n) converge simplement vers f si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in E,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

On dit que (f_n) converge uniformément vers f si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Exemple : $f_n :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $]0,1[$, mais pas uniformément.

Séries de Fourier

Résultats et notions essentielles

Question : peut-on écrire toute fonction périodique f comme la limite d'une série de Fourier ?

Théorème (Dirichlet, 1829)

Soit f une fonction périodique de période T et telle que

- les discontinuités de f sur $[0, T[$ sont en nombre fini et de première espèce,
- en tout point f admet une dérivée à gauche et à droite.

Alors la série $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)$, où

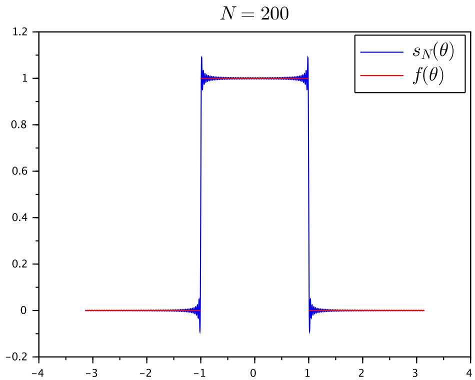
$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(k\omega x)\,dx, \quad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(k\omega x)\,dx,$$

converge vers une limite S définie par $S(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f \text{ est continue en } x, \\ \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, & \text{sinon.} \end{cases}$

La convergence est uniforme sur tout intervalle où f est continue.

Séries de Fourier

Phénomène de Gibbs



Quand f n'est pas continue, aux points de discontinuité les limites à gauche et à droite de la limite de la série ne sont pas celles de f, cela a été découvert par Wilbraham (1848), constaté par Michelson (1898) sur sa machine à sommer les séries de Fourier puis redécouvert par Gibbs (1899).