Exercices avec corrigé succinct du chapitre 1

(Remarque : les références ne sont pas gérées dans ce document, par contre les quelques **??** qui apparaissent dans ce texte sont bien définis dans la version écran complète du chapitre 1)

Exercice I.1

Montrer que la somme de vecteurs et le produit d'un vecteur par un nombre réel donnent à $\mathbb{R}^3$ une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Solution : Prendre la définition précise du document **??** et vérifier tous ses éléments en utilisant les propriétés connues des nombres réels. $\square$

Exercice I.2

Montrer que la somme de polynômes et le produit d'un polynôme par un nombre réel donnent à P_n (polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels) une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Solution : Prendre la définition précise du document **??** et vérifier toutes ses éléments en utilisant les propriétés connues des nombres réels. $\square$

Exercice I.3

Montrer que l'ensemble des polynômes de degré exactement égal à n n'est pas un espace vectoriel.

Solution : Cet ensemble n'a pas d'élément nul pour l'addition puisque le polynôme nul n'est pas de degré n. $\square$

Exercice I.4

- Montrer que si $\vec{x}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, alors $F = \{\lambda\vec{x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
- Montrer que si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors $F = \{\lambda\vec{x}+\mu\vec{y},\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- Montrer que l'espace des polynômes P_k est un sous-espace vectoriel de P_n si $k \le n$.

Solution : Il est facile de montrer que la somme de deux éléments de F est un élément de F et que le produit d'un nombre réel par un élément de F est un élément de F. Ainsi, pour le deuxième exemple, on a :

$$(\lambda_1\vec{x} + \mu_1\vec{y}) + (\lambda_2\vec{x} + \mu_2\vec{y}) = (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{x} + (\mu_1 + \mu_2)\vec{y},$$

$$\alpha(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \alpha\lambda\vec{x} + \alpha\mu\vec{y}.$$

$\square$

Exercice I.5

Montrer que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E alors que $F \cup G$ ne l'est pas (en général).

Solution : Pour $F \cap G$, il suffit de se rappeler la définition de $F \cap G = \{x \in E, x \in F \text{ et } x \in G\}$ et d'utiliser le fait que F et G sont des sous-espaces vectoriels.

Pour $F \cup G$, il faut exhiber un contre-exemple. Par exemple, si $F = \{\lambda(0,1),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{\lambda(1,0),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, $F \cup G = \{x \in E, x \in F \text{ ou } x \in G\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel car la somme de deux vecteurs de $F \cup G$ tels que $(0,1)$ et $(1,0)$ n'est pas dans $F \cup G$. $\square$

Exercice I.6

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E et soit

$$H = \{\vec{x} = \vec{y} + \vec{z},\ \vec{y} \in F,\ \vec{z} \in G\}.$$

On note alors $H = F + G$ et on appelle H la somme de F et G.

- Représenter graphiquement un élément de H lorsque $E = \mathbb{R}^3$, F est un plan vectoriel et G une droite vectorielle (non contenue dans le plan).
- Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E.
- Que vaut H dans le cas particulier de la première question ? Que vaut $F \cup G$ dans ce même cas ?
- Montrer que si $F \cap G = \{\vec{0}\}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont uniques pour un $\vec{x}$ donné. On dit alors que $F + G$ est une somme directe et on note $F \oplus G$.

Solution : Ces questions ne posent pas de difficulté. En ce qui concerne la troisième question, $H = \mathbb{R}^3$ et $F \cup G$ n'est que la réunion des vecteurs de la droite et des vecteurs du plan. Pour l'unicité de la décomposition de la dernière question (comme pour toute démonstration d'unicité), on part de deux décompositions et on démontre qu'elles sont égales. □

Exercice I.7

- Donner une famille liée de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (donner les vecteurs par leurs composantes).
- Montrer que la famille $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par leurs composantes est libre. Montrer qu'elle est aussi génératrice.
- En vous inspirant de la question précédente, donner une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^n$.

Solution : Pour donner une famille liée, on peut prendre deux vecteurs dont l'un est un scalaire fois le premier, mais il y a une infinité d'exemples simples possibles...

Pour montrer que la famille $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ est libre et génératrice, il suffit d'appliquer les définitions, ce qui correspond au cas particulier $n = 3$ de la dernière question. □

Exercice I.8

La famille $S = \{(1,1,-1),\ (1,1,1),\ (\sqrt{2},\sqrt{2},3)\}$ est-elle liée ?
Solution :

$$\alpha(1,1,-1)+\beta(1,1,1)+\gamma(\sqrt{2},\sqrt{2},3) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} \alpha & +\beta & +\sqrt{2}\gamma & = 0 \\ -\alpha & +\beta & +3\gamma & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} \alpha & +\beta & +\sqrt{2}\gamma & = 0 \\ & +2\beta & +(3+\sqrt{2})\gamma & = 0 \end{array}\right.$$

Il existe des coefficients non tous nuls, par exemple $\gamma = 1, \beta = (-\sqrt{2}-3)/2, \alpha = (-\sqrt{2}+3)/2$, donc la famille est liée. □

Exercice I.9

Montrer que la famille $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ de polynômes de P_n est une base de P_n.

Solution : On montre que la famille $\{x^0, x, x^2, \ldots, x^n\}$ est libre et génératrice, en utilisant en particulier la définition d'un polynôme et plus particulièrement celle du polynôme nul. □

Exercice I.10

Soit $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ une base de l'espace vectoriel E et soit $\vec{x} \in E$. En raisonnant par l'absurde, montrer que la décomposition de $\vec{x}$ sur B est unique, c'est-à-dire qu'il existe λ_1, λ_2,…,λ_n uniques tels que

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n.$$

Solution : On considère deux décompositions et on utilise le fait que la famille B est libre. □

Exercice I.11

À partir des vecteurs $\vec{x} = (1, 1, -1)$ et $\vec{y} = (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$, trouver une vecteur $\vec{z}$ tel que la famille $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Solution : On choisit un vecteur dont les deux premières composantes sont différentes par exemple $\vec{z} = (1, 0, 0)$, puis on vérifie que les trois vecteurs de la famille ainsi obtenue sont linéairement indépendants. Cela suffit alors puisque l'on connaît la dimension de $\mathbb{R}^3$, qui est égale à trois. □

Exercice I.12

Vérifier rapidement que les applications suivantes sont linéaires. Calculer leur noyau et leur image.

1. $u_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, définie par
$$u_1(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$
où a_1, a_2, …, a_n sont des réels donnés.

2. $u_2 : P_k \to P_{k-1}$, définie par
$$u_2(p) = p',$$
où p' est la dérivée du polynôme p.

Solution :

1. $\mathrm{Ker}\, u_1 = \{x \in \mathbb{R}^n,\ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0\}$, $\mathrm{Im}\, u_1 = \mathbb{R}$.

2. $\mathrm{Ker}\, u_2 = P_1$, l'ensemble des polynômes constants, et $\mathrm{Im}\, u_2 = P_{k-1}$.

□

Exercice I.13

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F + G$ et $F \cap G = \{\vec{0}\}$ (voir l'exercice **??**). On a montré que si $\vec{x} \in E$, alors il existe deux vecteurs uniques $\vec{y} \in F$ et $\vec{z} \in G$ tels que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Soit l'application

$$u : E \to F, \text{ telle que } u(\vec{x}) = \vec{y}.$$

1. Montrer que u est une application linéaire.

2. Calculer le noyau et l'image de u.

3. Donner leur dimension et vérifier le résultat
$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}\ (u) + \dim \mathrm{Im}\ (u).$$

Solution : Vérifier les propriétés de l'application linéaire, puis montrer que $\mathrm{Ker}\, u = G$ et $\mathrm{Im}\, u = F$, ce qui donne le résultat de la dernière question. □

Exercice I.14

On note u la rotation d'un angle θ dans $\mathbb{R}^2$, utiliser les propriétés géométriques pour traiter l'exercice :

1. Montrer que l'application u est linéaire.
2. Quel est son noyau, quelle est son image ?
3. Montrer qu'elle est bijective.
4. Donner l'application inverse et en déduire qu'elle est linéaire et bijective.

Solution : Aidez-vous d'une figure et tout est évident.

$u(\vec{V} + \vec{V}') = u(\vec{V}) + u(\vec{V}'),\ \ u(\lambda\vec{V}) = \lambda u(\vec{V}),\ \ \mathrm{Ker}\ u = \{\vec{0}\},\ \ \mathrm{Im}\ u = \mathbb{R}^2.$

L'application inverse d'une rotation d'angle θ est un rotation d'angle $-\theta$, c'est donc une application linéaire bijective, puisque vous venez de le démontrer pour la rotation d'angle θ. □

Exercice I.15

Montrer que la matrice de l'application $i_E : E \to E$ est la matrice identité I lorsque l'on munit E de la même base.

Solution : Soit $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ la base de E. Par définition d'une matrice associée à une application linéaire, la jème colonne de la matrice associée à i_E est constituée des composantes de $i_E(\vec{e}_j) = \vec{e}_j$ dans la base $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$. Les éléments de cette jème colonne sont donc tous nuls sauf le jème élément qui vaut 1. Cette matrice est donc bien la matrice identité. □

Exercice I.16

On suppose que $E = F = P_2$, on munit P_2 de la base canonique $\{1, x, x^2\}$ et on définit u telle que $u(p) = p'$. Déterminer alors la matrice de u.

Solution : $u(1) = 0$, $u(x) = 1$ et $u(x^2) = 2x$. La matrice est donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Exercice I.17

Calculer le produit AB (et BA lorsque cela est possible) dans les cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Solution :

1. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $AB = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et le produit BA est impossible car le nombre de colonnes de B est différent du nombre de lignes de A.

□

Exercice I.18
Montrer, en utilisant le produit de matrices, que la composée de deux rotations planes d'angles θ_1 et θ_2 est une rotation plane d'angle $\theta_1 + \theta_2$.
Solution : Vous effectuez le produit et vous utilisez les formules trigonométriques bien connues :

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2),$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2).$$

□

Exercice I.19
Montrer la proposition **??**. Pour cela on calculera la décomposition de $u(\vec{x})$ dans la base de F et on la comparera à la décomposition de $\vec{y}$ dans la même base.
Solution :

$$u(\vec{x}) = u(\sum x_j \vec{e}_j) = \sum x_j u(\vec{e}_j) = \sum_j x_j (\sum_i a_{ij} \vec{f}_i) = \sum_i (\sum_j a_{ij} x_j) \vec{f}_i = \sum_i y_i \vec{f}_i,$$

et l'unicité de la décomposition d'un vecteur sur une base donne

$$y_i = \sum_j a_{ij} x_j$$

soit $Y = AX$. □

Exercice I.20
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, u est l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice est A lorsque l'on munit $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ de leur base canonique. Calculer $u(\vec{x})$ pour $\vec{x} = (1, -1, 2)$.
Solution : En appliquant la proposition **??**, les composantes de $u(\vec{x})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont données par le produit

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

soit $u(\vec{x}) = (9, 11)$. □

Exercice I.21
On a montré, dans l'exercice **??** que la rotation plane d'angle θ est bijective. Donner la matrice inverse de la matrice de cette rotation.

Solution : On a montré aussi dans cet exercice que son inverse est la rotation d'angle $-\theta$. La matrice inverse est la matrice associée à l'application linéaire inverse, soit

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

□

Exercice I.22

Montrer que la matrice inverse d'une matrice, si elle existe, est unique.
Solution : Pour montrer l'unicité, on suppose que la matrice possède deux inverses B et C, qui vérifient donc

$$AC = CA = I\,,\ AB = BA = I.$$

Calculons alors le produit BAC de deux manières différentes

$$BAC = B(AC) = BI = B,\ \ BAC = (BA)C = IC = C,$$

ce qui donne $B = C$. □

Exercice I.23

Soient X et Y deux vecteurs colonnes, les produits X^TY et XY^T Existent-ils ? et, si oui,sont-ils égaux ?
Solution : Pour que ces produits existent, il faut évidemment que X et Y aient le même nombre n de composantes. Dans ce cas X^TY est une matrice à une ligne et une colonne, c'est donc un scalaire, plus précisément vous reconnaissez le produit scalaire de deux vecteurs dont les composantes seraient données par les éléments de X et Y. Par contre XY^T est une matrice à n lignes et n colonnes. Les deux matrices X^TY et XY^T étant de type différent, elles ne peuvent pas être égales ! □

Exercice I.24

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. On définit les vecteurs $\vec{e'}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e'}_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ d'une nouvelle base $\mathcal{E}' = \{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2\}$. Donner P, matrice de passage de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$.
Solution : Par définition de la matrice de passage (voir le paragraphe **??**), on a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

Exercice I.25

On reprend les données de l'exercice **??**. On définit $u \in \mathcal{L}(E; E)$ par
$u(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, u(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$

- Quelle est la matrice A de u dans la base $\mathcal{E}$?
- Exprimer $u(\vec{e'}_1)$, $u(\vec{e'}_2)$ en fonction de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.
- En déduire $u(\vec{e'}_1)$,$u(\vec{e'}_2)$ en fonction de $\vec{e'}_1$ et $\vec{e'}_2$.
- En déduire A'.
- Calculer $P^{-1}AP$.

Solution :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.
- $$u(\vec{e'}_1) = u(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = u(\vec{e}_1) + u(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2.$$

  De même
  $$u(\vec{e'}_2) = 7\vec{e}_2.$$
- Vous calculez $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ en fonction de $\vec{e'}_1$ et $\vec{e'}_2$, ce qui donne
  $$\vec{e}_1 = \frac{1}{3}\left(\vec{e'}_1 + \vec{e'}_2\right)\ ,\ \vec{e}_2 = \frac{1}{3}\left(2\vec{e'}_1 - \vec{e'}_2\right).$$

  Il suffit alors de remplacer dans le calcul de $u(\vec{e'}_1)$ et $u(\vec{e'}_2)$ de la question précédente.
- Les composantes de $u(\vec{e'}_1)$ et $u(\vec{e'}_2)$ sur $\vec{e'}_1$ et $\vec{e'}_2$ obtenues dans la question précédente vous donnent les colonnes de A'.
- Inversez la matrice P calculée dans l'exercice **??**, vous pouvez alors calculer $P^{-1}AP$, ce qui doit vous redonner la matrice A'.

$\square$

Exercice I.26

Déterminer le rang des matrices A suivantes :

- A est la matrice de la rotation dans le plan.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution :

- le rang de la matrice de la rotation dans le plan est 2 puisque cette matrice est inversible et de taille 2.
- Le rang de A est 2, puisque les deux premières colonnes sont linéairement indépendantes et que la troisième colonne est identique à la deuxième.
- Le rang de A est 2 puisque les deux premières colonnes sont linéairement indépendantes et que les colonnes 3 et 4 sont des combinaisons linéaires des deux premières colonnes (lesquelles ?).

□

Exercice I.27

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3a & c \\ 3b & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3\lambda \\ 0 & 1 & 2\lambda \\ 4 & 1 & 2\lambda \end{vmatrix}.$$

Solution : Ce sont des calculs évidents que vous pouvez vérifier avec scilab lorsque les matrices sont numériques. Pour le dernier déterminant, vous pouvez "sortir" λ (pourquoi ?). □

Exercice I.28

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda\cos\theta & -\sin\theta \\ \lambda\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Solution : Les résultats sont : 1, λ, 1. □

Exercice I.29

1. Considérons une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ triangulaire inférieure ($a_{ij} = 0$ pour $i < j$), en utilisant la définition du déterminant montrer que dét $A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.
2. En déduire que :
   - pour les matrices diagonales ($a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$) on a aussi dét$A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$,
   - la matrice identité a pour déterminant dét $I = 1$.

Solution : On itère la définition du déterminant sur des matrices dont la dimension diminue jusqu'à ce que l'on arrive sur un scalaire. Il est à noter qu'une matrice diagonale est un cas particulier des matrices triangulaires. □

Exercice I.30

Montrer par un exemple que, en général, dét $(A + B) \neq$ dét (A) + dét (B).

Solution : On peut prendre par exemple $A = I$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. □

Exercice I.31

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Solution : La réponse est -6. et s'obtient en développant par rapport une ligne qui a plusieurs 0.
□

Exercice I.32

Montrer que le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est égal au produit de ses termes

diagonaux.
Solution : Le déterminant d'une matrice étant égal au déterminant de sa transposée, on peut appliquer les résultats de l'exercice **??**. □

Exercice I.33

Montrer que deux matrices semblables ont même déterminant.
Solution : Si deux matrices A et B sont semblables, alors il existe une matrice inversible P telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

Il suffit alors de calculer les déterminants des deux membres et d'utiliser les règles sur le produit et sur l'inverse des déterminants. □

Exercice I.34

Calculer à nouveau le déterminant de la matrice de l'exercice **??**, en développant par rapport à une ligne ou une colonne de votre choix.
Solution : La réponse est toujours -6 ! et s'obtient en développant par rapport une ligne (ou une colonne) qui a plusieurs 0. □

Exercice I.35

Quel est le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}?$$

Solution : Le rang de la matrice est au moins égal à 2 car $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. Pour montrer que le rang de A est égal à 3, il faut trouver un déterminant à 3 lignes et 3 colonnes non nul. Or les 4 déterminants de ce type sont nuls (les calculer). Le rang est donc définitivement 2. □

Exercice I.36

Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ en utilisant les co-facteurs.
Solution : Le déterminant de A est égal à -13. Alors l'inverse de A est donné par

$$A^{-1} = -\frac{1}{13}B^T,$$

où

$$B = \begin{pmatrix} -7 & 11 & -5 \\ 4 & -10 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

□

Exercice I.37

Résoudre le système linéaire $Ax = 0$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

En déduire le rang de la matrice A.

Un système $Ax = 0$, dont la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ est telle que $n > p$, a-t-il toujours une solution ? si oui est-elle unique ?

Solution :

$$x \in \text{Ker } A \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 0 \\ x_1 & & +3x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +4x_3 & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \\ & x_2 & -2x_3 & = 0 \\ & -x_2 & +2x_3 & = 0 \\ & -x_2 & +2x_3 & = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \\ & x_2 & -2x_3 & = 0 \\ & & 0 & = 0 \\ & & 0 & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_1 & = -3x_3 \\ x_2 & = 2x_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La dimension du noyau de A est donc égal à 1 (une base de ce noyau est $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$). Or

$$3 = \text{rang } A + \dim \text{ (ker } A),$$

ce qui donne rang $A = 2$.

Nous venons de démontrer par l'exemple précédent, que la solution d'un système $Ax = 0$, dont la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ est telle que $n > p$, peut avoir une solution non unique. Il est clair que ce système qui a plus d'équations que d'inconnues n'a pas toujours une solution (il est facile de construire des contre-exemples à 3 équations et 2 inconnues). □

Exercice I.38

Résoudre le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = -1 \\ x_1 & & +3x_3 & = 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +4x_3 & = 2 \end{array} \right.$$

Ce système a-t-il une solution ?

Solution : On transforme ce système en un système équivalent

$$\left\{ \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \\ & x_2 & -2x_3 & = -2 \\ & -x_2 & +2x_3 & = 2 \\ & -x_2 & +2x_3 & = 0 \end{array} \right.$$

qui n'a évidemment aucune solution. □

Exercice I.39

Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution : $sI - A = \begin{pmatrix} s-5 & -2 \\ -2 & s-2 \end{pmatrix}$ donc

$\pi_A(s) = \text{dét } (sI - A) = (s-5)(s-2) - 4 = s^2 - 7s + 6 = (s-1)(s-6)$.

On obtient donc 2 valeurs propres réelles $\lambda = 1$ et $\lambda = 6$, on détermine les vecteurs propres associés :

- $\lambda = 1$,

$$(A-\lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4y_1 + 2y_2 = 0 \\ 2y_1 + y_2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow y_2 = -2y_1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

- $\lambda = 6$,

$$(A-\lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -y_1 + 2y_2 = 0 \\ 2y_1 - 4y_2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow y_1 = 2y_2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Y = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$\square$

Exercice I.40
Montrer que :

- Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses termes diagonaux.
- A non inversible $\Longleftrightarrow$ 0 est valeur propre de A.
- A et A^T ont les mêmes valeurs propres mais pas les mêmes vecteurs propres.

Solution :

- Si une matrice est triangulaire, son déterminant est le produit de ses éléments diagonaux, donc

$$\text{dét }(sI - A) = (s-a_{11})(s-a_{22})...(s-a_{nn}).$$

- A non inversible $\Longleftrightarrow$ dét $A = 0 \Longleftrightarrow$ 0 est valeur propre de A.
- Si $B \in \mathcal{M}_{n,n}$, alors dét $B =$ dét B^T et donc $det(sI - A) =$ dét $(sI-A)^T =$ dét $(sI - A^T)$. Il est facile d'exhiber un contre-exemple pour les vecteurs propres.

$\square$

Exercice I.41
Montrer que deux matrices semblables ont le même déterminant et que la réciproque est fausse.
Solution : Si deux matrices A et B sont semblables, il existe une matrice P telle que $B = P^{-1}AP$, ce qui donne

$$\text{dét } B = \text{dét } P^{-1}AP = \text{dét } P^{-1} \text{dét } A \text{dét } P = (\text{dét } P)^{-1} \text{dét } A \text{dét } P = \text{dét } A.$$

Si l'on se place dans $\mathcal{M}_{2,2}$, la matrice identité et la matrice triangulaire $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont le même déterminant mais ne sont pas semblables. Il est en effet impossible de trouver une matrice inversible P telle que $PIP^{-1} = A$ puisque $PIP^{-1} = I \neq A$. $\square$

Exercice I.42
Montrer que si $A = PDP^{-1}$ où la matrice D est diagonale, alors les colonnes de P sont vecteurs propres de A, les valeurs propres étant les éléments de la diagonale de D.
Solution :

$$A = PDP^{-1} \Leftrightarrow AP = PD \Leftrightarrow AP_i = PD_i = d_{ii}P_i.$$

Ce que l'on vient d'écrire découle uniquement des propriétés du produit matriciel, pour lequel on a bien sûr utilisé le fait que D est diagonale.

On obtient donc que P_i (ième colonne de P) est vecteur propre de A associé à la valeur propre d_{ii}. $\square$

Exercice I.43
Soit $B \in \mathcal{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$, montrer que $B^T B$ est symétrique et semi-définie positive.
Solution : $(B^T B)^T = B^T B$, ce qui prouve que B est symétrique.
$x^T B^T B x = (Bx)^T Bx = ||Bx|| \geq 0$, ce qui montre que $B^T B$ est semi-définie positive. $\square$

Exercice I.44
Soit $B \in \mathcal{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$, avec $n \leq m$ et rang $B = n$, montrer que $B^T B$ est symétrique et définie positive.
Solution : D'après l'exercice précédent, $B^T B$ est symétrique et semi-définie positive.

$$x^T B^T B x = 0 \ \Rightarrow \ ||Bx|| = 0 \ \Rightarrow \ Bx = 0,$$

et puisque B est de rang n, son noyau est réduit au vecteur nul et donc $x = 0$. La matrice $B^T B$ est donc définie positive. $\square$