Exercices avec corrigé succinct du chapitre 2

(Remarque : les références ne sont pas gérées dans ce document, par contre les quelques **??** qui apparaissent dans ce texte sont bien définis dans la version écran complète du chapitre 2)

Exercice II.1

On définit la matrice A, à n lignes et n colonnes par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On veut résoudre $Ax = 0$.

1. Montrer en résolvant les $n-1$ premières équations que $x_i = ix_1$, $i = 1,...,n$.
2. Résoudre la dernière équation et en déduire que $x = 0$.
3. En déduire que A est inversible.

Solution :

1. On démontre ce résultat par récurrence, c'est trivialement vérifié pour $i = 1$. Supposons que $x_i = ix_1$ pour $i \leq k$, on écrit alors la kième équation, on obtient :

   $$-(k-1)x_1 + 2kx_1 - x_{k+1} = 0 \Leftrightarrow x_{k+1} = (k+1)x_1.$$

   Ce qui démontre le résultat.
2. En écrivant la dernière équation, on obtient

   $$-(n-1)x_1 + 2nx_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

   En utilisant la question précédente on a donc $x = 0$.
3. On a vu dans le chapitre 1 qu'une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible est que son noyau soit réduit à 0, c'est ce que l'on vient de montrer.

□

Exercice II.2

Soit A une matrice triangulaire inférieure. Écrire l'algorithme permettant de résoudre le système linéaire $Ax = b$ (b vecteur donné) en n'oubliant pas de vérifier au départ que ce système a une solution.

Solution :

pour $i = 1$ jusqu'à n **faire**
  si $|a_{ii}| < \varepsilon$ **alors**
    Arrêter l'algorithme et donner un message d'erreur
  fin si
fin pour
$x_1 \leftarrow \dfrac{b_1}{a_{11}}$

pour $i = 2$ jusqu'à n **faire**

$\quad x_i \leftarrow \dfrac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} x_k}{a_{ii}}$

fin pour

$\square$

Exercice II.3

Soit A une matrice triangulaire supérieure, montrer que le calcul du vecteur inconnu est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_n & = & \frac{b_n}{a_{nn}} \\ x_i & = & \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right), \text{ pour } i = n-1,\, n-2,\, \ldots,\, 1. \end{array} \right.$$

Écrire alors l'algorithme correspondant.

Solution : Le système linéaire s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{rcc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & = & \ldots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\ a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

On commence donc par calculer l'inconnue x_n, puis l'inconnue $x_{n-1} = (b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n)/a_{n-1,n-1}$ et on remonte ainsi jusqu'à x_1. Ainsi, lorsque l'on arrive à la ième équation, on a déjà calculé x_k pour $k = i+1, \ldots, n$. Or cette équation s'écrit

$$a_{ii}x_i + a_{i,i+1}x_{i+1} + \ldots + a_{i,n-1}x_{n-1} + a_{in}x_n = b_i$$

ce qui permet de tirer x_i par la formule donnée dans l'énoncé. L'algorithme ne diffère de celui de l'exercice précédent que par les indices. À vous de l'écrire ... $\square$

Exercice II.4

Soit le système $Ax = b$. On considère la première étape de l'élimination de Gauss. Montrer que la ième équation (pour $i \geq 2$) est modifiée de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{ij}^{(1)} = a_{ij} & \longrightarrow & a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \quad \text{pour } j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n \\ b_i^{(1)} = b_i & \longrightarrow & b_i^{(2)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1. \end{array} \right.$$

Solution : On élimine le premier élément de la ième ligne L_i en effectuant une combinaison $L_i - \alpha L_1$, ce qui donne

$$a_{i1} - \alpha a_{11} = 0$$

soit

$$\alpha = \frac{a_{i1}}{a_{11}}.$$

On a alors

$$L_i^{(2)} = L_i - \alpha L_1$$

soit

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \alpha a_{1j}\,, \text{ pour } j = 1, \ldots, n,\, i = 2,..,n\,.$$

La même combinaison est effectuée sur les composantes du second membre, soit

$$b_i^{(2)} = b_i - \alpha b_1,\ i = 2,..,n\,.$$

$\square$

Exercice II.5

Soit le système $Ax = b$. On considère la deuxième étape de l'élimination de Gauss. Montrer que la ième équation (pour $i \geq 3$) est modifiée de la manière suivante :

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} \quad \longrightarrow \quad a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} a_{2j}^{(2)} \quad \text{pour } j = 2,\, 3,\ \ldots,\, n \\ b_i^{(2)} \quad \longrightarrow \quad b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} b_2^{(2)}. \end{cases}$$

Solution : On élimine le deuxième élément de la ième ligne $L_i^{(2)}$ en effectuant une combinaison $L_i^{(2)} - \alpha L_2^{(2)}$, ce qui donne

$$a_{i2}^{(2)} - \alpha a_{22}^{(2)} = 0$$

soit

$$\alpha = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}.$$

On a alors

$$L_i^{(3)} = L_i^{(2)} - \alpha L_2^{(2)}$$

soit

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - \alpha a_{2j}^{(2)}\,, \ \text{ pour } j = 2, \ldots, n,\ i = 3, \ldots, n\,.$$

La même combinaison est effectuée sur les composantes du second membre, soit

$$b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - \alpha b_2^{(2)},\ i = 3, \ldots, n\,.$$

$\square$

Exercice II.6

Soit le système $Ax = b$. On considère la kième étape de l'élimination de Gauss. Montrer que la ième équation (pour $i \geq k + 1$) est modifiée de la manière suivante :

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k)} \quad \longrightarrow \quad a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)} \quad \text{pour } j = k,\, k+1,\ \ldots,\, n \\ b_i^{(k)} \quad \longrightarrow \quad b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)}. \end{cases}$$

Solution : On élimine le kième élément de la kème ligne $L_k^{(k)}$ en effectuant une combinaison $L_i^{(k)} - \alpha L_k^{(k)}$, ce qui donne

$$a_{ik}^{(k)} - \alpha a_{kk}^{(k)} = 0$$

soit

$$\alpha = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}.$$

On a alors

$$L_i^{(k+1)} = L_i^{(k)} - \alpha L_k^{(k)}$$

soit

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \alpha a_{kj}^{(k)}\ , \ \text{ pour } j = k,\dots,n,\ i = k+1,\dots,n\,.$$

La même combinaison est effectuée sur les composantes du second membre, soit

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \alpha b_k^{(k)},\ i = k+1,\dots,n\,.$$

Pour $j = k$ le coefficient α a été déterminé pour que $a_{ik}^{(k+1)} = 0$, donc dans la pratique on affecte directement 0 à ce coefficient sans effectuer le calcul. Les calculs sont donc faits pour i et j variant de $k+1$ à n. □

Exercice II.7

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et le vecteur $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, appliquez l'algorithme de Gauss "à la main" pour calculer la solution de $Ax = b$.

Solution : L'algorithme procède de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1/2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La résolution de ce système triangulaire donne :

$$x_3 = 1,\ x_2 = 1,\ x_1 = 1.$$

□

Exercice II.8

Calculer le nombre d'opérations effectuées pour réaliser l'élimination de Gauss en fonction de n en séparant multiplications/divisions et additions/ soustractions. Pour cela on pourra utiliser les deux formules

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k &= \frac{n(n+1)}{2}, \\
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Solution : La démarche est de compter le nombre d'opérations à partir de la boucle la plus intérieure. Nous allons évaluer le nombre de multiplications/divisions, vous laissant le soin dévaluer le nombre d'additions algébriques. On a ainsi :

- pour $j = k+1 \ \rightarrow\ n$, $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - c a_{kj}$: on effectue $n - k$ multiplications,
- calcul de b_i ET c : on effectue 1 multiplication et 1 division

- On effectue les opérations précédentes pour $i = k+1 \ \rightarrow\ n$: on effctue donc $(n-k)(n-k+2)$ multiplications/divisions
- On effectue ce qui précède pour $k = 1 \ \rightarrow\ n-1$: on effectue donc $\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+2)$ multiplications/divisions

soit

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+2) = \sum_{p=1}^{n-1} p(p+2) = \sum_{p=1}^{n-1} p^2 + 2\sum_{p=1}^{n-1} p = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + 2\frac{(n-1)n}{2} \simeq \frac{1}{3}n^3.$$

Dans le résultat, on n'a gardé que les termes de plus haut degré. □

Exercice II.9

Soient L une matrice triangulaire inférieure et U une matrice triangulaire supérieure et on pose $A = LU$. Montrer que, pour la colonne j de A, on a

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik}u_{kj}, \ \text{ pour } i \leq j,$$

et

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik}u_{kj}, \ \text{ pour } i > j.$$

Solution : L'élément du produit des matrices L et U est donné par :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}u_{kj}.$$

Or $l_{ik} = 0$ pour $i < k$ et $u_{kj} = 0$ pour $j < k$. Le produit des éléments sera donc nul lorsque k sera supérieur au plus petit des deux entiers i et j, d'où le résultat. □

Exercice II.10

Soit A une matrice inversible qui admet une factorisation $A = LU$ où L est triangulaire inférieure, U est triangulaire supérieure et la diagonale de U ne comporte que des 1, alors cette factorisation est unique.

Solution : On suppose qu'il y a deux décompositons possibles :

$$A = LU = \widehat{L}\widehat{U}.$$

Puisque A est inversible, L, U, $\widehat{L}$, $\widehat{U}$ sont inversibles. On a alors

$$(\widehat{L})^{-1}L = \widehat{U}U^{-1}.$$

Le produit de deux matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures) est une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure). Il en résulte que l'égalité précédente donne un matrice diagonale (car triangulaire inférieure et supérieure). D'autre part, la diagonale de $\widehat{U}U^{-1}$ ne comportant que des 1, la matrice produit est nécessairement la matrice identité. Ainsi

$$(\widehat{L})^{-1}L = \widehat{U}U^{-1} = I,$$

soit

$$L = \widehat{L}\,, U = \widehat{U}.$$

□

Exercice II.11
Résoudre le système $Ax = b$ dont la factorisation LU de A est donnée :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Solution : La résolution de $Ly = b$ donne

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

puis celle de $Ux = y$ donne

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

Exercice II.12
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, en vous inspirant de ce qui a été fait pour l'algorithme de Doolittle dans le paragraphe "**??**", effectuez la factorisation de Crout de la matrice A, c'est à dire déterminez L et U telles que $A = LU$ avec les termes diagonaux de U égaux à 1 (ceux de L sont quelconques).

Solution : On cherche $L = \begin{pmatrix} \times & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & \times & \times \\ 0 & 1 & \times \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ telles que $A = LU$.

– On identifie la première colonne de A et la première colonne de LU, cela permet d'obtenir la première colonne de L :

$$LU = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & \times & 0 \\ -2 & \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \times & \times \\ 0 & 1 & \times \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

– On identifie la première ligne de A avec la première ligne de LU, cela permet d'obtenir la première ligne de U :

$$LU = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & \times & 0 \\ -2 & \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & \times \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

– On identifie la deuxième colonne de A avec la deuxième colonne de LU, cela permet d'obtenir la deuxième colonne de L :

$$LU = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & \times \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

– On identifie la deuxième ligne de A avec la deuxième ligne de LU, cela permet d'obtenir la deuxième ligne de U :

$$LU = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

– On identifie la troisième colonne de A avec la troisième colonne de LU, cela permet d'obtenir la troisième colonne de L :

$$LU = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

Exercice II.13

Dans le calcul direct de la factorisation LU, on suppose maintenant que c'est la matrice U dont tous les éléments de la diagonale sont égaux à 1 et non pas la matrice L. Calculer les éléments des matrices U et L à partir d'éléments de A et d'éléments de U et L de colonnes ou de lignes précédentes. Comment modifier l'algorithme de Doolittle pour le calcul des éléments l_{ij} et u_{ij} des matrices L et U. Cet algorithme s'appelle l'algorithme de Crout.

Solution : Le raisonnement s'obtient en échangeant des lignes et les colonnes dans le raisonnement de l'algorithme de Doolittle et les matrices L et U. Ainsi, cela commence par :

En écrivant $A = LU$ et en se souvenant que les matrices L et U sont triangulaires, on obtient

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} + l_{ij} \quad \text{pour } i = j, j+1, \ldots, n.$$

Ce qui est équivalent à

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \quad \text{pour } i = j, j+1, \ldots, n.$$

Nous voyons que pour calculer les éléments l_{ij} de la jème colonne de L, il nous faut connaître préalablement les éléments des colonnes 1 à $j-1$ de L ainsi que les éléments des lignes 1 à $j-1$ de U.

etc.... À vous de continuer. □

Exercice II.14

Montrez que si la factorisation $A = LU$ existe (L triangulaire inférieure avec une diagonale unitaire et U triangulaire supérieure inversible), alors les sous-matrices principales de A sont inversibles.

Solution : On découpe les matrices A, L et U :

$$\begin{pmatrix} [A]_k & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [L]_k & 0 \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [U]_k & \cdots \\ 0 & \cdots \end{pmatrix}.$$

En effectuant le produit par blocs, on obtient alors

$$[A]_k = [L]_k [U]_k.$$

Les deux matrices triangulaires $[L]_k$ et $[U]_k$ sont inversibles car les éléments des diagonales des matrices L et U sont non nuls, donc la matrice $[A]_k$ est inversible. □

Exercice II.15
Soit σ une permutation de $\{1,2,...,n\}$ et soit g l'application linéaire telle que $g(\vec{e}_j) = \vec{e}_{\sigma(j)}$ où $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la matrice P de l'application g est telle que

$$p_{ij} = \delta_{i,\sigma(j)}$$

et que $P^{-1} = P^T$.
Solution : On rappelle que l'élément p_{ij} correspond à la ième composante de $g(\vec{e}_j)$. On a donc

$$p_{ij} = \left(\vec{e}_{\sigma(j)}\right)_i = \delta_{i,\sigma(j)}.$$

Pour montrer que $P^{-1} = P^T$, il suffit de calculer le produit PP^T :

$$\left(PP^T\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}p_{jk} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)}\delta_{j,\sigma(k)}.$$

Le produit $\delta_{i,\sigma(k)}\delta_{j,\sigma(k)}$ est nul sauf si

$$i = j = \sigma(k)$$

et dans ce cas le produit vaut 1, ce qui montre le résultat. □

Exercice II.16

1. Soit A une matrice symétrique admettant une factorisation LDL^T. Montrer que pour $i \geq j$ on a

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} d_k l_{ik} l_{jk},$$

où on a noté d_k le $k^{\text{ème}}$ élément de la diagonale de D.
2. Déduire de la question précédente que les coefficients de L et ceux de D peuvent être obtenus par les formules (on considère que les sommes ne sont pas effectuées quand $j = 1$)

$$d_j = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{jk}^2,$$

et pour $i > j$

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{ik} l_{jk}}{d_j}.$$

Indication : ne pas oublier que $l_{jj} = 1$ par définition.

Solution :
1. Le produit de matrices donne

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (LD)_{ik} l_{jk},$$

soit, puisque la matrice D est diagonale

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} d_k l_{jk}.$$

Or, puisque la matrice L est triangulaire inférieure, le produit $l_{ik}l_{jk}$ est nul pour $k > \inf(i,j)$, soit $k > j$, ce qui donne le résultat.

2. En détaillant la somme de la première question, on obtient ($l_{jj} = 1$) :

$$a_{jj} = \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{jk}^2 + d_j l_{jj}^2 = \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{jk}^2 + d_j,$$

soit

$$d_j = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{jk}^2.$$

Et pour $i > j$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{ik} l_{jk} + d_j l_{ij} l_{jj} = \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{ik} l_{jk} + d_j l_{ij},$$

soit

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{ik} l_{jk}}{d_j}.$$

$\square$

Exercice II.17

Soit A une matrice symétrique définie positive. On considère sa factorisation de Cholesky $A = BB^T$. Montrer que tous les éléments de la diagonale de B sont non nuls.

Solution : Un raisonnement simple est basé sur le calcul de déterminant. En effet, puisque la matrice B est triangulaire, son déterminant est le produit des éléments de sa diagonale.

$$\text{dét } A = \text{dét } (BB^T) = \text{dét } B \text{ dét } (B^T) = \prod_{i=1}^{n} (b_{ii})^2.$$

La matrice A est inversible puisque elle est définie positive (voir les rappels du chapitre 1). Le déterminant de A est donc non nul, d'où l'on déduit que les éléments b_{ii} sont non nuls. $\square$

Exercice II.18

En calculant le discriminant du trinôme en θ suivant

$$q(\theta) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + \theta y_i)^2$$

montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Solution : Il suffit de considérer $q(\theta)$ comme un trinôme en θ qui est toujours positif ou nul, c'est-à-dire qui n'a pas de racines réelles distinctes. Dans ce cas le trinôme

$$q(\theta) = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \theta^2 + \left(2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \theta + \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

a un discriminant négatif ou nul

$$\left(2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \leq 0,$$

soit

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right).$$

Le résultat s'obtient en prenant la racine carrée de cette inégalité, puisque la fonction racine carrée est croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$. $\square$

Exercice II.19

Montrer, en utilisant les propriétés de la norme vectorielle, que si on définit $\|A\|$ par

$$\|A\| = \max_{x\in\mathbb{C}^n, x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

on a :

$$\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|,$$

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

Solution : Les propriétés de la norme vectorielle donnent :

$$\|\lambda Ax\| = |\lambda|\|Ax\|.$$

On a donc

$$\|\lambda A\| = \max_{x\in\mathbb{C}^n, x\neq 0} |\lambda|\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda|\|A\|.$$

De même

$$\|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\|,$$

ce qui donne pour tout $x \neq 0$

$$\frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \frac{\|Bx\|}{\|x\|},$$

soit

$$\frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq \max_{x\in\mathbb{C}^n, x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \max_{x\in\mathbb{C}^n, x\neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}.$$

Cette dernière inégalité étant vraie pour tout $x \neq 0$, est donc encore vraie pour le max, soit

$$\max_{x\in\mathbb{C}^n, x\neq 0} \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq \max_{x\in\mathbb{C}^n, x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \max_{x\in\mathbb{C}^n, x\neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}.$$

$\square$

Exercice II.20

Montrer que, par définition de la norme matricielle subordonnée, on a

$$\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|\,\forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Solution : Rappelons la définition de la norme subordonnée

$$\|A\| = \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Ceci implique que pour tout$x \neq 0$, on a

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$$

soit

$$\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|.$$

Cette inégalité étant trivialement vérifiée pour $x = 0$, elle est donc vraie pour tout $x \in \mathbb{C}^n$. □

Exercice II.21

Montrer que, pour toute norme subordonnée, $\|I\| = 1$. Que vaut $\|I\|_F$ (norme de Frobenius) ?

Solution : Par définition de la norme subordonnée, on a

$$\|I\| = \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \frac{\|Ix\|}{\|x\|} = \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1.$$

Par définition de la norme de Frobenius, on a

$$\|I\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |I_{ij}|^2} = \sqrt{n}.$$

□

Exercice II.22

Soit $A \in \mathcal{M}_{nm}$,$B \in \mathcal{M}_{mn}$, soit λ une valeur propre non nulle de BA correspondant à un vecteur propre Y, montrer que AY est un vecteur propre (non nul) de AB correspondant à la valeur propre λ. En déduire que

$$\rho(BA) = \rho(AB).$$

Solution : Par définition de la valeur propre, on a

$$BAY = \lambda Y.$$

Multiplions à gauche par A, il vient

$$ABAY = \lambda AY.$$

Ceci correspond à la définition d'une valeur propre de AB à condition que le vecteur propre associé soit non nul. Supposons que $AY = 0$, alors en multipliant par B à gauche, on obtiendrait

$$BAY = 0,(= \lambda Y),$$

ce qui est impossible puisque λ est non nul et Y non nul (vecteur propre).

On vient de montrer que toute valeur propre non nulle de BA est une valeur propre de AB. Le raisonnement est évidemment valable en échangeant les rôles de A et de B. Les deux matrices BA et AB ont donc les mêmes valeurs propres non nulles et donc le même rayon spectral. □

Exercice II.23

Soit A une matrice symétrique donc diagonalisable, A peut donc s'écrire $A = PDP^{-1}$,avec D diagonale.

- Quelles sont les valeurs propres de A ? Quelles sont les valeurs propres de A^2 ?
- En déduire que
$$\rho(A^2) = \rho(A)^2.$$
- Déduire de la question précédente que
$$\|A\|_2 = \rho(A).$$
- Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
quel est son rayon spectral ? Ce rayon peut-il être considéré comme une norme matricielle lorsque la matrice n'est pas symétrique ?

Solution :

- Puisque la matrice A est symétrique, elle est diagonalisable (voir les rappels du chapitre 1). Elle s'écrit, donc
$$A = PDP^{-1},$$
où D est une matrice diagonale. Les éléments de la diagonale de D sont les valeurs propres de A. On a donc
$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1},$$
ce qui montre que les valeurs propres de A^2 sont les éléments de la diagonale de D^2, c'est à dire les valeurs propres de A au carré.
- Si l'on range les valeurs propres de A de la manière suivante :
$$|\lambda_n| \leq |\lambda_{n-1}| \leq \ldots \leq |\lambda_1|,$$
on a
$$|\lambda_n|^2 \leq |\lambda_{n-1}|^2 \leq \ldots \leq |\lambda_1|^2.$$
Il en résulte que
$$\rho(A^2) = |\lambda_1|^2 = \rho(A)^2.$$
- Dans le cours il est démontré (rechercher le résultat si vous l'avez oublié) que
$$\|A\|_2^2 = \rho(AA^T).$$
La matrice étant symétrique ($A = A^T$) et en appliquant la question précédente, on a
$$\|A\|_2^2 = \rho(A^2) = \rho(A)^2,$$
soit (les deux quantités étant positives)
$$\|A\|_2 = \rho(A).$$
- Les valeurs propres de A sont évidemment nulles, ce qui donne un rayon spectral nul. Si ce rayon spectral était une norme matricielle, on devrait avoir une matrice nulle par la première propriété d'une norme matricielle. La matrice A n'est évidemment pas la matrice nulle, le rayon spectral n'est donc pas une norme matricielle pour les matrices non symétriques.

□

Exercice II.24
Montrer que pour toute norme matricielle subordonnée on a

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

Solution : Considérons une valeur propre λ de A :

$$AY = \lambda Y.$$

On a déjà montré (exercice **??**) que

$$\|AY\| \leq \|A\| \, \|Y\|,$$

ce qui donne

$$\|\lambda Y\| \leq \|A\| \, \|Y\|$$

donc

$$|\lambda| \, \|Y\| \leq \|A\| \, \|Y\|$$

or ($\|Y\| \neq 0$ puisque Y est un vecteur non nul), donc après simplification

$$|\lambda| \leq \|A\|.$$

Cette inégalité étant valable pour toute valeur propre, elle est évidemment valable pour la plus grande en module, soit

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

□

Exercice II.25
Soit une matrice diagonale D. Calculer le conditionnement de D à l'aide de la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne. Dans quel cas ce conditionnement est-il égal à 1 ?
Solution : Une matrice diagonale étant une matrice symétrique, sa norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne est égale à son rayon spectral. Il en est de même de l'inverse de D. D'autre part, les valeurs propres d'une matrice diagonale sont ses éléments diagonaux. Si l'on appelle d_i les éléments diagonaux de D, on a

$$\|D\| = \max_{1 \leq i \leq n} |d_i| \,, \quad \|D^{-1}\| = \frac{1}{\min\limits_{1 \leq i \leq n} |d_i|}.$$

Le conditionnement de D est donc donné par

$$\chi(D) = \|D\| \, \|D^{-1}\| = \max_{1 \leq i \leq n} |d_i| \times \frac{1}{\min\limits_{1 \leq i \leq n} |d_i|}.$$

Ce conditionnement est égal à 1 si et seulement si

$$\max_{1 \leq i \leq n} |d_i| = \min_{1 \leq i \leq n} |d_i|$$

ce qui est équivalent à tous les éléments diagonaux de D sont égaux, c'est-à-dire $D = \alpha I$. □

Exercice II.26
Soit A une matrice symétrique inversible dont les valeurs propres sont $\lambda_1,...,\lambda_n$, on suppose que :

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n| > 0$$

- Montrer que les valeurs propres de A^{-1} sont $\frac{1}{\lambda_1},...,\frac{1}{\lambda_n}$ et que les valeurs propres vérifient :

$$\frac{1}{|\lambda_n|} \geq \frac{1}{|\lambda_{n-1}|} \geq \ldots \geq \frac{1}{|\lambda_1|}.$$

- En déduire $\chi(A)$ lorsque l'on choisit la norme subordonnée à la norme euclidienne.

Solution :

- Puisque la matrice A est symétrique, elle est diagonalisable (voir les rappels du chapitre 1). Elle s'écrit, donc
$$A = PDP^{-1},$$
où D est une matrice diagonale dont les éléments de la diagonale sont les valeurs propres de A. On a donc
$$A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1},$$
ce qui montre que les valeurs propres de A^{-1} sont les éléments de la diagonale de D^{-1}, c'est à dire l'inverse des valeurs propres de A. Puisque les valeurs propres de A sont rangées de la manière suivante :
$$0 < |\lambda_n| \leq \ldots \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_1|,$$
les valeurs propres de A^{-1} sont données par :
$$\frac{1}{|\lambda_1|} \leq \frac{1}{|\lambda_2|} \leq \ldots \leq \frac{1}{|\lambda_n|}.$$
- Par définition, on a
$$\chi(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \rho(A)\rho(A^{-1}) = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|}.$$

$\square$