Exercices avec corrigé succinct du chapitre 4

(Remarque : les références ne sont pas gérées dans ce document, par contre les quelques **??** qui apparaissent dans ce texte sont bien définis dans la version écran complète du chapitre 4)

Exercice IV.1

On rappelle que la définition du déterminant à partir des permutations est la suivante

$$\text{dét } A = \sum_{\sigma} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$$

où la somme est faite sur toutes les permutations de l'ensemble $\{1,2,\dots,n\}$. En utilisant cette définition, montrer que si une matrice est inversible, il existe une permutation de ses lignes telle que tous les éléments de la diagonale de la matrice ainsi obtenue soient non nuls.

Solution : La définition du déterminant à partir des permutations donne

$$\text{dét } A = \sum_{\sigma} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$$

où la somme porte sur toutes les permutations de l'ensemble $\{1,2,\dots,n\}$. Or si la matrice est inversible, son déterminant est non nul et il existe donc au moins un élément de cette somme qui est non nul et qui correspond donc à une permutation $\hat{\sigma}$. Il suffit alors de permuter les lignes de la matrice A suivant la permutation $\hat{\sigma}$ pour obtenir le résultat attendu. □

Exercice IV.2

Donner les matrices D, E et F correspondant à la décomposition $A = D - E - F$ de la méthode de Jacobi dans le cas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Solution :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -0 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Exercice IV.3

Quelle est, pour la méthode de Gauss-Seidel, la forme de la matrice du système permettant de calculer $x^{(k+1)}$ à partir de $x^{(k)}$. Que pensez-vous de la résolution de ce système ?

Solution : La matrice $D - E$ est triangulaire inférieure. Le nombre de multiplications/divisions est de l'ordre de n^2 pour la résolution d'un système triangulaire, ce qui est beaucoup moins important que les n^3 de la méthode LU. Par contre, la diagonale de A ne doit pas comporter d'éléments nuls. □

Exercice IV.4

Soit la décomposition $A = M - N$ avec M inversible et la méthode itérative

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné,} \\ Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b. \end{cases}$$

Donner une condition suffisante sur les matrices M et N pour que la suite $x^{(k)}$ converge vers la solution de $Ax = b$.

Solution : On a donc $x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$, donc en reprenant les notations du paragraphe **??**, on a $C = M^{-1}N$ et $d = M^{-1}b$. On utilise la proposition **??**. Si $||M^{-1}N|| < 1$, alors la suite $x^{(k)}$ converge vers la solution unique de

$$(I - M^{-1}N)x = d \Leftrightarrow x - M^{-1}Nx = M^{-1}b \Leftrightarrow (M - N)x = b \Leftrightarrow Ax = b.$$

On remarque au passage que si M inversible, si $||M^{-1}N|| < 1$, alors la matrice $A = M - N$ est inversible, en effet il sufffit de reprendre la proposition **??**, $A = M(I - M^{-1}N)$ est un produit de matrices inversibles.

□

Exercice IV.5

Montrer que pour la dichotomie, le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une précision inférieure à ϵ est supérieur ou égal à $\log_2 \frac{b-a}{\epsilon}$.

Solution : La méthode de la dichotomie est basée sur le fait que la solution x^* de $f(x) = x$ recherchée appartient à une suite de segments emboités $[a_k - b_k]$ pour $k \in \mathbb{N}$. Or la longueur de ces segments est donnée par

$$l_k = \frac{b-a}{2^k}.$$

Ceci implique que

$$x^* - a_k \leq l_k.$$

Pour que a_n soit une approximation de x^* avec un précision inférieure à ε, il suffit que

$$l_n \leq \varepsilon$$

soit

$$\frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n \leq \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}$$

□

Exercice IV.6

Pour calculer la racine carrée d'un nombre réel $a > 0$, on résout $x^2 = a$. Il existe alors différentes manières de se ramener à un point fixe :

- $$x = \frac{a}{x} \text{ et } g_1(x) = \frac{a}{x},$$
- $$2x = x + \frac{a}{x}, \text{ soit} x = 2x - \frac{a}{x} \text{ et } g_2(x) = 2x - \frac{a}{x},$$
- $$x = \frac{x}{2} + \frac{a}{2x} \text{ et } g_3(x) = \frac{x}{2} + \frac{a}{2x}.$$

Tracer les fonctions $g_i(x)$ et la bissectrice pour $x > 0$. Prendre u_0 quelconque et construire graphiquement la suite $u_{k+1} = g_i(u_{(k)}$ pour $k > 0$. Conclusion?

Solution : Vous pouvez vous aider de SCILAB pour tracer graphiquement la courbe $g(x)$, la bissectrice et les points $(u_k, g(u_k)$.

– Voir sur la figure 1 un exemple de ce qui vous pourriez obtenir pour g_1

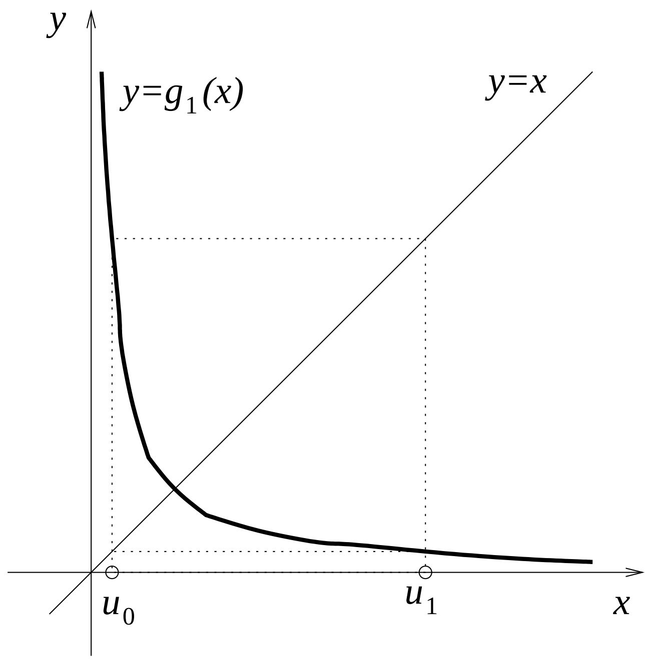

FIG. 1 – *Point fixe 1*

Il est facile de calculer dans le cas de g_1 la suite des itérés. En effet

$$u_0 \text{ donné },\ u_1 = \frac{a}{u_0},\ u_{2n} = u_0\ \ u_{2n+1} = u_1\ , n = 1,2,\ldots$$

La suite prend successivement les valeurs u_0 et u_1 et ne converge donc pas.

– Voir sur la figure 2 un exemple de ce qui vous pourriez obtenir pour g_2
  Le tracé que vous avez effectué pour g_2 vous montre que la suite u_k diverge.
– Voir sur la figure 3 un exemple de ce qui vous pourriez obtenir pour g_3
  Le tracé que vous avez effectué pour g_3 vous montre que la suite u_k se rapproche de la solution. Après avoir étudié les théorèmes sur la convergence d'une telle suite, vous pourrez démontrer qu'elle converge.

□

Exercice IV.7

Soit $g : [a,b] \to [a,b]$, continument dérivable, telle que $|g'(x)| \leq k < 1, \forall x \in [a,b]$. On suppose que g admet deux points fixes dans $[a,b]$. Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis, que l'on arrive à une contradiction.

Solution : Le raisonnement se fait par l'absurde en supposant qu'il existe deux points fixes distincts x^* et $\hat{x}$ distincts dans $[a,b]$. Alors, le théorème des accroissements finis donne

$$g(x^*) - g(\hat{x}) = (x^* - \hat{x})g'(\xi),$$

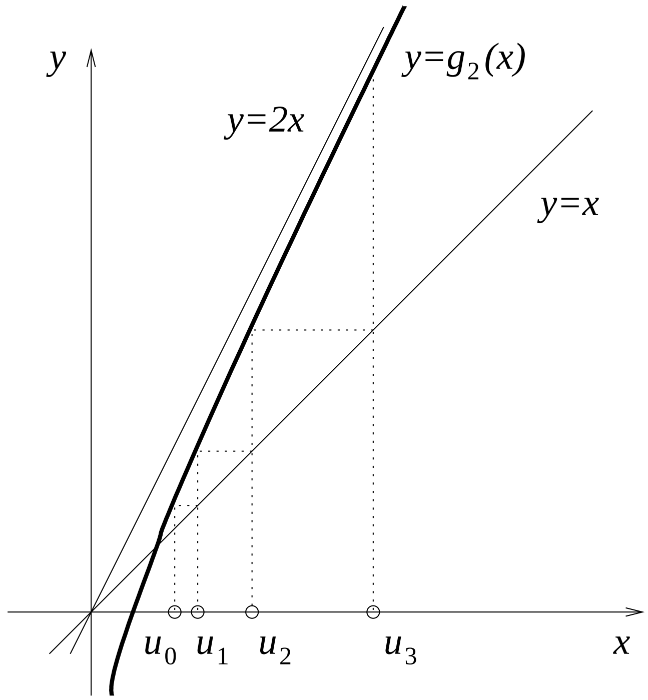

FIG. 2 – *Point fixe 2*

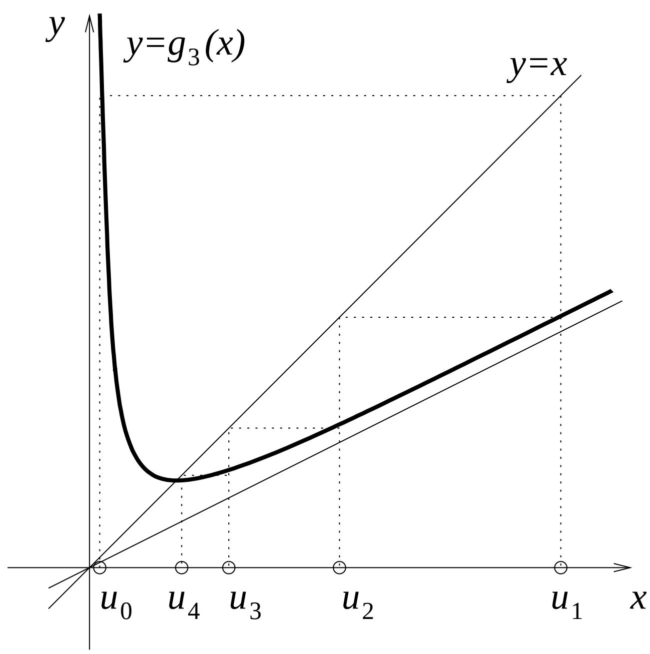

FIG. 3 – *Point fixe 3*

où ξ est compris entre x^* et $\hat{x}$ et donc appartient à $[a,b]$. Alors

$$|x^* - \hat{x}| = |g(x^*) - g(\hat{x})| = |x^* - \hat{x}|\,|g'(\xi)| < |x^* - \hat{x}|$$

ce qui est absurde! ∎

Exercice IV.8
Pour calculer la racine x^* de $x^2 - 3x - 1 = 0$ sur $[-1, +1]$, on pose $g(x) = \frac{x^2-1}{3}$ pour appliquer une méthode de point fixe $x = g(x)$. Montrer que la suite $x_{n+1} = g(x_n)$, avec $x_0 \in [-1, +1]$, converge vers un unique point fixe $x^* \in [-1,1]$.
Solution : Pour appliquer la proposition **??** il suffit de démontrer que l'application g va de $[-1,1]$ dans lui-même et que sa dérivée est bornée par une constante strictement inférieure à 1 sur cet intervalle. Faites un tableau de variation de la fonction g sur $[-1,1]$ et vous démontrerez la première partie sans problème. Quant à la dérivée $g'(x) = \frac{2}{3}x$ ... □

Exercice IV.9
Soit une suite (x_n) convergeant vers x^*. On suppose que

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k|x_n - x_{n-1}|$$

où $k < 1$.

1. Montrer que
$$|x_{n+1} - x_n| \leq k^n|x_1 - x_0|.$$
2. En déduire que, pour $p > n$,
$$|x_p - x_n| \leq (k^{p-1} + \ldots + k^n)|x_1 - x_0|.$$
3. Après avoir calculé la somme du membre de droite, faites tendre p vers l'infini pour obtenir
$$|x^* - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|.$$

Solution :
1. Inégalité évidente en itérant l'inégalité de l'hypothèse.
2. On écrit
$$x_p - x_n = x_p - x_{p-1} + x_{p-1} - \ldots - x_{n+1} + x_{n+1} - x_n$$
on prend les valeurs absolues, on utilise l'inégalité triangulaire, puis la majoration précédente.
3. On a
$$k^{p-1} + \ldots + k^{n+1} + k^n = k^n(k^{p-1-n} + \ldots + k + 1) = k^n\frac{1-k^{p-n}}{1-k}$$
ce qui donne
$$|x_p - x_n| \leq k^n\frac{1-k^{p-n}}{1-k}|x_1 - x_0|\,.$$
On passe alors à la limite quand p tend vers $+\infty$ sur les deux membres de l'inégalité (le passage à la limite conserve l'inégalité). Alors, puisque $k < 1$
$$\lim_{p\to+\infty} k^{p-n} = 0$$
et, par hypothèse, $\lim_{p\to+\infty} x_p = x^*$, ce qui donne le résultat.

□

Exercice IV.10
On reprend la fonction $g(x) = \frac{x^2-1}{3}$ dont l'unique point fixe x^* de $[-1,1]$ est racine du trinôme $x^2 - 3x - 1 = 0$. Soit $x_0 = 0$, calculer le nombre d'itérations de point fixe n nécessaires pour obtenir

une précision inférieure à $\epsilon = 10^{-3}$ pour le calcul de x^*. Vérifier votre résultat en calculant les n premiers itérés de la méthode de point fixe.

Solution : On utilise les résultats des exercices **??** et **??**, ce qui donne

$$|x^* - x_n| \leq k^n \frac{1}{1-k}|x_1 - x_0|, \text{ avec } k = \frac{2}{3}.$$

On obtient donc

$$x_1 = -\frac{1}{3},\ k^n \frac{1}{1-k}|x_1 - x_0| = \left(\frac{2}{3}\right)^n,\ |x^* - x_n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Il suffit donc d'avoir

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \epsilon \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{2}{3}\right) \leq \ln \epsilon \Leftrightarrow n \geq 18.$$

□

Exercice IV.11

Soit la courbe $y = f(x)$. Ecrire l'équation de la tangente à cette courbe au point d'abscisse $x = x_n$. Donner alors l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe Ox. Montrer que l'on retrouve ainsi une itération de la méthode de Newton. Pour illustrer graphiquement et numériquement cette méthode, tracer et calculer deux itérations avec $f(x) = x^2 - 2$ et $x_0 = 2$.

Solution : L'équation de la droite tangente est évidemment

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n).$$

L'intersection avec l'axe Ox donne

$$0 = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n),$$

ce qui redonne la méthode de Newton lorsque l'on en extrait x_{n+1}.

Le calcul de x_1 et x_2 donne

$$x_1 = 2 - \frac{2}{4} = \frac{3}{2},\ x_2 = \frac{3}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{3} = \frac{17}{12}.$$

□

Exercice IV.12

Soit la fonction $f(x) = \cos x - x$. Montrer qu'elle admet une racine sur $[0,\pi/2]$. Calculer trois itérations de la méthode de Newton en partant de $x_0 = \pi/4$ puis avec $x_0 = 0$. Conclusion.

Solution : Puisque $f(0)f(\frac{\pi}{2}) < 0$ la fonction f admet au moins une racine sur $[0,\frac{\pi}{2}]$. Utiliser alors une calculatrice pour calculer trois itérations de la méthode de Newton en partant de $\frac{\pi}{4}$ puis de 0. □

Exercice IV.13

Écrire l'équation de la droite passant par les points $(x_n,f(x_n))$ et $(x_{n-1},f(x_{n-1}))$. Donner l'abscisse x_{n+1} de l'intersection de cette droite avec l'axe Ox. Montrer que l'on retrouve l'équation de la sécante.

Solution : L'équation de la droite (pour ceux qui auraient un trou de mémoire) est donnée par

$$\frac{y - f(x_n)}{x - x_n} = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}.$$

Annuler alors y et tirer x_{n+1} pour retrouver l'équation de la sécante. □

Exercice IV.14

Tracer une courbe convexe qui coupe l'axe Ox en un point x^*. Considérer deux points x_0 et x_1 qui entourent ce point. Effectuer alors graphiquement quelques itérations de la méthode de la sécante (modifiée) de telle sorte que la sécante passe toujours par deux points qui entourent x^*. Remarquez alors que soit x_0, soit x_1 est toujours pris en compte dans toutes les itérations.

Solution : Comme on le voit sur la figure 4, la suite construite par la méthode de la sécante modifiée

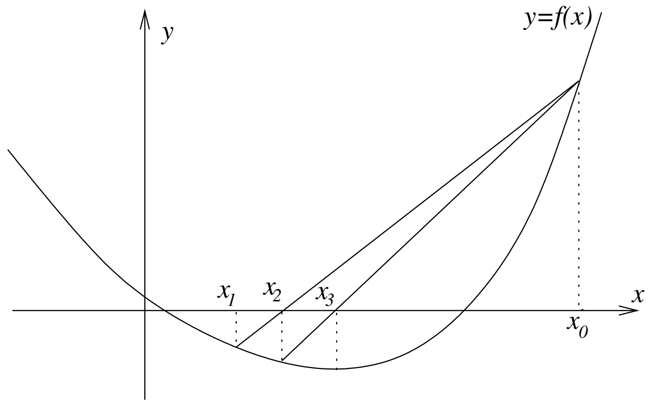

FIG. 4 – *Méthode de la sécante modifiée*

est obtenue successivement avec les couples x_0,x_1 puis x_2,x_0 puis x_3,x_0, chacun des couples encadre la racine.

Par la méthode de la sécante simple, à partir de x_0,x_1 on aurait construit x_2, (le même !) puis à partir de x_1,x_2 on aurait construit un x_3' qui n'est pas x_3. □

Exercice IV.15

On considère les deux équations non-linéaires

$$x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 4, \;\; x_1^2 - x_2 + 1 = 0.$$

Ecrire une étape de la méthode de Newton. Prenez un vecteur $x^{(0)}$ et calculez le vecteur $x^{(1)}$.

Solution : Donnons d'abord la fonction f et sa matrice jacobienne

$$f(x) = \begin{cases} x_1^2 + (x_2^2 - 1)^2 - 4 \\ x_1^2 - x_2^2 + 1 \end{cases} \qquad Df(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2(x_2 - 1) \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}$$

Alors on peut calculer $x^{(1)}$ en fonction de $x^{(0)}$ de la manière suivante :

$$\left(Df\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \right) \right) \begin{pmatrix} x_1^{(1)} - x_1^{(0)} \\ x_2^{(1)} - x_2^{(0)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \left(x_1^{(0)}\right)^2 + \left(\left(x_2^{(0)}\right)^2 - 1 \right)^2 - 4 \\ \left(x_1^{(0)}\right)^2 - \left(x_2^{(0)}\right)^2 + 1 \end{pmatrix}$$

□