Exercices avec corrigé succinct du chapitre 6

(Remarque : les références ne sont pas gérées dans ce document, par contre les quelques **??** qui apparaissent dans ce texte sont bien définis dans la version écran complète du chapitre 6)

Exercice VI.1

On note $I(f) = \int_a^b f(t)\,dt$, $J(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(t_i)$.

1. On choisit $w_i = \int_a^b \mathcal{L}_i(t)\,dt$, avec $\mathcal{L}_i$ polynôme de la base de Lagrange associée aux points $t_0,t_1,...,t_n$.
   Montrer que alors $I(p) = J(p)$, $\forall p \in \mathcal{P}_n$.
2. Réciproquement, on suppose que $I(p) = J(p)$, $\forall p \in \mathcal{P}_n$, montrer que
   $w_i = \int_a^b \mathcal{L}_i(t)\,dt$.
3. Si on note $\{p_0,p_1,...,p_n\}$ la base canonique de $\mathcal{P}_n$, montrer que

$$I(p) = J(p),\ \forall p \in \mathcal{P}_n \Leftrightarrow I(p_i) = J(p_i),\ i = 0,...,n.$$

Solution :

1. Si $p \in \mathcal{P}_n$, alors $\forall t$ $p(t) = \sum_{i=0}^{n} p(t_i)\mathcal{L}_i(t)$, donc

$$I(p) = \int_a^b p(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} p(t_i) \int_a^b \mathcal{L}_i(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} w_i p(t_i) = J(p).$$

2.

$$I(p) = J(p),\ \forall p \in \mathcal{P}_n \Rightarrow I(\mathcal{L}_j) = J(\mathcal{L}_j), j = 0,...,n,$$

   or

$$I(\mathcal{L}_j) = \int_a^b \mathcal{L}_j(t)\,dt, J(\mathcal{L}_j) = \sum_{i=0}^{n} w_i \mathcal{L}_j(t_i) = w_j,$$

   d'où le résultat.

3. $I(p) = J(p),\ \forall p \in \mathcal{P}_n \Rightarrow I(p_i) = J(p_i),\ i = 0,...,n$
   Réciproquement si $p \in \mathcal{P}_n,\ p = \sum_{i=0}^{n} a_i p_i$, donc

$$I(p) = \sum_{i=0}^{n} a_i \int_a^b p_i(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} a_i I(p_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i J(p_i).$$

   D'autre part :

$$J(p) = \sum_{j=0}^{n} w_j p(t_j) = \sum_{j=0}^{n} w_j \sum_{i=0}^{n} a_i p_i(t_j) = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{n} w_j a_i p_i(t_j) = \sum_{i=0}^{n} a_i J(p_i).$$

   Ce qui termine de démontrer l'égalité.

□

Exercice VI.2
On note $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$, $J(f) = w_0 f(-1) + w_1 f(0) + w_2 f(1)$.

1. Calculer $(w_i)_{i=0,1,2}$ pour que $I(p) = J(p)$ pour tous les polynômes de $\mathcal{P}_n$, n le plus grand possible. Quel est ce degré ?
2. En déduire une formule de quadrature pour $\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt$.

Solution :

1. Si on note p_i les polynômes de la base canonique $p_i(t) = t^i$, on écrit
$$\left\{\begin{array}{lllll} I(p_0) = J(p_0) & \Leftrightarrow & \int_{-1}^{1} dt = w_0 + w_1 + w_2 & \Leftrightarrow w_0 + w_1 + w_2 = 2 \\ I(p_1) = J(p_1) & \Leftrightarrow & \int_{-1}^{1} tdt = -w_0 + w_2 & \Leftrightarrow w_0 - w_2 = 0 \\ I(p_2) = J(p_2) & \Leftrightarrow & \int_{-1}^{1} t^2 dt = w_0 + w_2 & \Leftrightarrow w_0 + w_2 = \frac{2}{3} \end{array}\right. .$$
Pour que ces 3 relations soient vérifiées, il faut que $w_0 = w_2 = \frac{1}{3}, w_1 = \frac{4}{3}$
Vérifions avec ces coefficients si $I(p_3) = J(p_3)$, après calcul, on obtient $I(p_3) = J(p_3) = 0$, on continue !
On calcule $I(p_4) = \frac{2}{5}, J(p_4) = \frac{2}{3}$.
La formule construite (qui s'appelle la formule de Simpson) est exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
On aurait pu calculer les coefficients w_i en écrivant $w_i = \int_{-1}^{1} \mathcal{L}_i(t)dt$ où $\mathcal{L}_i$ est le polynôme de la base de Lagrange.
2. $$\int_0^2 f(t)dt = \int_{-1}^{1} f(u+1)du, \text{où } u = t-1$$
Si on pose $g(u) = f(u+1)$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(u)du$ est approchée par
$$\frac{1}{3}g(-1) + \frac{4}{3}g(0) + \frac{1}{3}g(1) = \frac{1}{3}f(0) + \frac{4}{3}f(1) + \frac{1}{3}f(2)$$
d'où la formule.

□

Exercice VI.3
La méthode du point milieu consiste à approcher
$$I(f) = \int_a^b f(t)\,dt \text{ par } J(f) = (b-a)f(t_M), \text{ où } t_M = \frac{a+b}{2}.$$

1. Vérifier que cette formule est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 1.
2. Quel est l'ordre de cette méthode ?
3. En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2, montrer que l'erreur est donnée par :
$$\exists \eta \in]a,b[, \quad E(f) = I(f) - J(f) = f''(\eta) \int_a^b \frac{(t-t_M)^2}{2}\,dt = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta).$$

Solution :

1. On vérifie que $I(p_0) = J(p_0) = b - a$, $I(p_1) = J(p_1) = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$
2. L'ordre est donc au moins égal à 1, on calcule

$$I(p_2) = \frac{b^3 - a^3}{3},\ J(p_2) = (b-a)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

   $I(p_2) \neq J(p_2)$, donc la formule est d'ordre 1.
3. La formule de Taylor est :

$$f(t) = f(t_M) + (t - t_M)f'(t_M) + \frac{(t - t_M)^2}{2} f''(c_t)$$

$$J(f) = (b-a)f(t_M) = \int_a^b f(t_M)dt$$

   donc

$$E(f) = I(f) - J(f) = \int_a^b (f(t) - f(t_M))dt = \int_a^b (t - t_M)f'(t_M) + \frac{(t - t_M)^2}{2} f''(c_t)dt$$

   or $\displaystyle\int_a^b (t - t_M)dt = 0$, donc

$$E(f) = \int_a^b \frac{(t - t_M)^2}{2} f''(c_t)dt = f''(\eta) \int_a^b \frac{(t - t_M)^2}{2} dt = f''(\eta)\frac{(b-a)^3}{24}$$

□

Exercice VI.4

On approche $I(\varphi) = \int_{-1}^{1} \varphi(\xi)\, d\xi$ par la formule des rectangles $J(\varphi) = w\varphi(t_0)$. Etant donné t_0, calculer w pour que le degré d'exactitude soit le plus élévé possible. Donner le degré d'exactitude en fonction de t_0.

Solution : $I(p_0) = 2$, $J(p_0) = w$, donc il faut que $w = 2$.

$I(p_1) = 0$, $J(p_1) = 2t_0$, donc

- si $t_0 \neq 0$,$I(p_1) \neq J(p_1)$, l'ordre est 0.
- si $t_0 = 0$,$I(p_1) = J(p_1)$, on a de plus $I(p_2) = \dfrac{2}{3}$,$J(p_2) = 0$, donc l'ordre est 1.

□

Exercice VI.5

Rappeler la formule des trapèzes et donner le degré d'exactitude de cette formule.

Solution : On approche $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)dt$ par $J(f) = f(-1) + f(1)$.

On calcule :

$$I(p_0) = 2,\ J(p_0) = 2,$$

$$I(p_1) = 0,\ J(p_1) = 0,$$

$$I(p_2) = \frac{2}{3},\, J(p_2) = 2,$$

Donc l'ordre est 1.

□

Exercice VI.6

Calculer les coefficients w_0, w_1, w_2 et w_3 de la formule de Simpson 3/8 qui approche :

$I(\varphi) = \int_{-1}^{1} \varphi(\xi)\, d\xi$ par $J(\varphi) = w_0\varphi(-1) + w_1\varphi(-\frac{1}{3}) + w_2\varphi(\frac{1}{3}) + w_3\varphi(1)$.

Donner le degré d'exactitude de cette formule.

Solution : On calcule

$$I(p_0) = 2,\, J(p_0) = w_0 + w_1 + w_2 + w_3,$$
$$I(p_1) = 0,\, J(p_1) = -w_0 - \frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2 + w_3,$$
$$I(p_2) = \frac{2}{3},\, J(p_2) = w_0 + \frac{1}{9}w_1 + \frac{1}{9}w_2 + w_3,$$
$$I(p_3) = 0,\, J(p_3) = -w_0 - \frac{1}{27}w_1 + \frac{1}{27}w_2 + w_3,$$

On obtient un système de 4 équations à 4 inconnues.

En remplaçant la 4ème équation par la 4ème moins la 2ème, on montre que $w_1 = w_2$.

En remplaçant la 3ème équation par la 3ème moins la 1ère, on montre que $w_1 = w_2 = \frac{3}{4}$.

On résout alors les deux premières équations, on obtient :

$$w_0 = w_3 = \frac{1}{4},\, w_1 = w_2 = \frac{3}{4}.$$

On calcule $I(p_4)$ et $J(p_4)$, ces deux valeurs sont distinctes, donc l'ordre vaut 3.

□

Exercice VI.7

On cherche à approcher $\int_a^b f(t)\, dt$ à l'aide d'une méthode composée à partir de la méthode de Simpson, on pose $h = \frac{b-a}{2M}$,$t_i = a + ih$. Montrer que

$$J(f) = \frac{h}{3}\left(f(t_0) + 4\sum_{i=0}^{M-1} f(t_{2i+1}) + 2\sum_{i=1}^{M-1} f(t_{2i}) + f(t_{2M})\right),$$

$$E(f) = -\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\eta),\, \eta \in [a,b].$$

Solution : En applicant la méthode de Simpson sur chacun des intervalles $[t_{2i},t_{2i+2}]$, on obtient

$$J(f) = \frac{h}{3}\left(f(t_0) + 4f(t_1) + f(t_2) + f(t_2) + 4f(t_3) + f(t_4) + ... + f(t_{2M-2}) + 4f(t_{2M-1}) + f(t_{2M})\right),$$

ce qui donne le résultat en regroupant. De même en sommant les erreurs, on obtient :

$$E(f) = -\frac{h^5}{90}\left(f^{(4)}(\eta_1) + f^{(4)}(\eta_2) + ... + f^{(4)}(\eta_M)\right).$$

On applique le théorème de la valeur intermédiaire pour affirmer qu'il existe η tel que

$$f^{(4)}(\eta) = \frac{\left(f^{(4)}(\eta_1) + f^{(4)}(\eta_2) + ... + f^{(4)}(\eta_M)\right)}{M}.$$

On a donc

$$E(f) = -\frac{h^5}{90} M f^{(4)}(\eta) = -\frac{h^4}{180}(b-a) f^{(4)}(\eta).$$

□

Exercice VI.8

Montrer que les polynômes de Legendre $\{g_0, g_1, \ldots, g_n\}$ forment une base de $\mathcal{P}_n$.

Solution : Les polynômes g_i sont de degré i, ils forment donc une famille libre, en effet notons $p(t) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i g_i(t)$, si p est le polynôme nul, alors le coefficient de t^n est nul, or ce coefficient vaut $\lambda_n \frac{(2n)!}{n!}$, en effet les polynômes $g_0, g_1, ..., g_{n-1}$ sont de degré inférieur ou égal à $n-1$. On en déduit donc que $\lambda_n = 0$.

On fait un raisonnement similaire pour le coefficient de t^{n-1}, on montre que $\lambda_{n-1} = 0$, on recommence et on montre que $\lambda_{n-2} = \lambda_{n-3} = ... = \lambda_0 = 0$.

On vient donc de montrer que :

$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i g_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_n = \lambda_{n-1} = ... = \lambda_0 = 0.$

Donc la famille est $\{g_0, g_1, ..., g_n\}$ est libre.

La dimension de $\mathcal{P}_n$ est égal à $n+1$, donc $\{g_0, g_1, ..., g_n\}$ est une base de $\mathcal{P}_n$.

□

Exercice VI.9

Construire les formules de Gauss-Legendre à 1, 2 et 3 points. Vérifier le degré d'exactitude de ces formules.

Solution :

1. Formule à un point :
   $g_1(t) = 2t$, donc $\xi_1 = 0$.
   On doit résoudre $g_0(\xi_1) w_1 = 2$ donc $w_1 = 2$.
   On retrouve la formule des rectangles avec $t_0 = 0$ vue dans l'exercice **??** :
   $$J(f) = 2f(0).$$
   On a déja montré que l'ordre est égal à 1.
2. Formule à deux points :
   $g_2(t) = 12t^2 - 4 = 4(3t^2 - 1)$, donc $\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
   On doit résoudre :
   $$\begin{pmatrix} g_0(\xi_1) & g_0(\xi_2) \\ g_1(\xi_1) & g_1(\xi_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

donc $w_1 = w_2 = 1$, d'où :

$$J(f) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Comme prévu on a $I(p_0) = J(p_0)$,$I(p_1) = J(p_1)$,$I(p_2) = J(p_2)$,$I(p_3) = J(p_3)$,
après calculs, on obtient que $I(p_4) \neq J(p_4)$, l'ordre est donc égal à 3

3. Formule à trois points :

   $g_3(t) = t(120t^2 - 72)$, donc $\xi_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$.
   On doit résoudre :

$$\begin{pmatrix} g_0(\xi_1) & g_0(\xi_2) & g_0(\xi_3) \\ g_1(\xi_1) & g_1(\xi_2) & g_0(\xi_3) \\ g_2(\xi_1) & g_2(\xi_2) & g_2(\xi_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 & 2\sqrt{\frac{3}{5}} \\ \frac{16}{5} & -4 & \frac{16}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   donc $w_1 = w_3 = \dfrac{5}{9}$,$w_2 = \dfrac{8}{9}$, d'où :

$$J(f) = \frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right).$$

   Comme prévu on a $I(p_0) = J(p_0)$,$I(p_1) = J(p_1)$,$I(p_2) = J(p_2)$,$I(p_3) = J(p_3)$,$I(p_4) = J(p_4)$,$I(p_5) = J(p_5)$,
   après calculs, on obtient que $I(p_6) \neq J(p_6)$, l'ordre est donc égal à 5

$\square$