

## *Chapitre 7 : Résolution numérique des équations différentielles*

Équipe de Mathématiques Appliquées

UTC

---

*Septembre 2021*



# Chapitre 7

## Équations différentielles

|     |                                                            |    |
|-----|------------------------------------------------------------|----|
| 7.1 | <a href="#">Principes généraux de résolution</a> . . . . . | 3  |
| 7.2 | <a href="#">Les schémas à un pas</a> . . . . .             | 14 |
| 7.3 | <a href="#">Les schémas multi-pas</a> . . . . .            | 32 |

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 7.1 Principes généraux de résolution

|       |                                                             |    |
|-------|-------------------------------------------------------------|----|
| 7.1.1 | Motivations . . . . .                                       | 4  |
| 7.1.2 | Éléments de théorie des équations différentielles . . . . . | 7  |
| 7.1.3 | Principe des méthodes numériques . . . . .                  | 11 |

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## 7.1.1 Motivations

### Exercices :

#### [Exercice C.1.1](#)

On considère un pendule initialement au repos et présentant une déviation  $\theta_0$  par rapport à la verticale. L'équation différentielle régissant la déviation  $\theta(t)$  est la suivante :

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L} \sin\theta(t), \\ \theta(0) = \theta_0, \\ \dot{\theta}(0) = 0. \end{cases} \quad (7.1.1)$$

Lorsque  $\theta_0$  est petit, on peut se permettre de faire une approximation de  $\sin\theta(t)$  au premier ordre, ce qui conduit à poser

$$\sin\theta(t) \approx \theta(t),$$

et dans ce cas on montre aisément que l'on a

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\omega t, \quad (7.1.2)$$

où  $\omega = \sqrt{g/L}$ . Par contre, si  $\theta_0$  n'est pas petit, cette approximation n'est plus valable du tout : la Figure 7.1.1 montre les solutions obtenues pour  $\theta_0 = \frac{63}{64}\pi$ . Il est flagrant que la

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

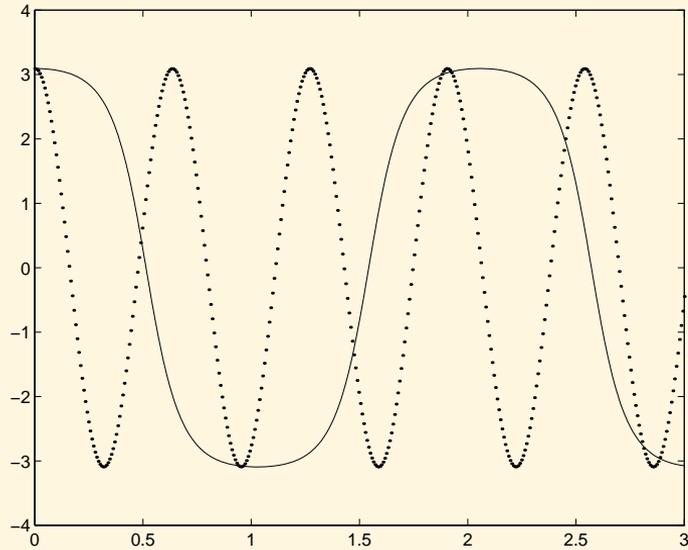
**Motivations**

FIGURE 7.1.1 – Oscillation d'un pendule linéaire (en pointillés) et non-linéaire (en trait plein)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

solution provenant du problème linéarisé (en pointillés) donne une idée bien éloignée de ce qu'il se passe en réalité (en trait plein).

Nous voyons ainsi que la linéarisation ne donne des résultats exploitables que si l'angle initial  $\theta_0$  est petit.

Or on ne sait pas obtenir de solution exacte du problème non linéaire. Il faut donc en rechercher des solutions approchées.

L'objet de ce chapitre est de présenter les principales techniques numériques permettant d'atteindre cet objectif.

D'autres possibilités d'approximation existent et étaient très développées avant l'usage intensif des ordinateurs. Par exemple, on peut chercher une solution du problème non linéaire sous forme d'un développement en série. On détermine alors les coefficients en introduisant le développement dans l'équation différentielle.

## Motivations

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 7.1.2 Éléments de théorie des équations différentielles

**Exercices :**[Exercice C.1.2](#)[Exercice C.1.3](#)**Documents :**[Document B.1.1](#)[Document B.1.2](#)

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continûment différentiable, on notera  $f(t, y)$  cette fonction,  $\frac{\partial f}{\partial t}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  les applications dérivées partielles<sup>1</sup>. Dans un document référencé, nous rappelons quelques résultats de différentiation de fonctions composées.

**Définition 7.1.1.** *On dit que  $\hat{y} : I \rightarrow \mathbb{R}$ , fonction continûment dérivable, est solution de l'équation différentielle*

$$y' = f(t, y), \quad (7.1.3)$$

si pour tout  $t \in I$  on a

$$\hat{y}'(t) = f(t, \hat{y}(t)).$$

Une équation différentielle seule ne suffit pas à définir une solution unique. Classiquement, on lui rajoute une **condition initiale**, c'est-à-dire une condition de la forme :

$$y(t_0) = y_0, \quad \text{où } t_0 \in I \text{ et } y_0 \in \mathbb{R} \text{ sont donnés.} \quad (7.1.4)$$

---

1. Attention à ne pas confondre la variable muette  $y$  et la solution de l'équation différentielle, notée  $y$  également, mais qui est une fonction.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Dans un document référencé, nous rappelons le Théorème de Cauchy–Lipschitz, qui énonce une condition suffisante, pour que l'équation différentielle (7.1.3) avec la condition initiale (7.1.4) admette une solution et une seule dépendant continûment des données.

Nous ne nous intéresserons qu'à des problèmes de ce type. Cependant, il faut garder à l'esprit que l'on peut être confronté à d'autres situations. Ainsi, l'équation  $y' = f(t, y)$  avec condition initiale  $y(t_0) = y_0$ , peut admettre, éventuellement, plusieurs solutions. Par exemple l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{y(t)}, & t > 0, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

admet les deux solutions

$$y_1(t) = 0 \text{ et } y_2(t) = \frac{t^2}{4}.$$

Elle en admet même une infinité. En effet, quel que soit le nombre réel  $a > 0$ , la fonction  $y_a$  définie par

$$y_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{pour } 0 \leq t \leq a, \\ \frac{(t-a)^2}{4}, & \text{pour } a \leq t, \end{cases}$$

est aussi solution.

Nous nous sommes limités jusqu'ici à une équation du premier ordre. Bien sûr, on rencontre des équations d'ordre supérieur. Ainsi en mécanique rencontre-t-on souvent

## Éléments de théorie des équations différentielles

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

des équations d'ordre 2 :

$$y''(t) = g(t, y(t), y'(t)), \text{ où } g : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Une équation d'ordre 2 nécessite deux conditions supplémentaires pour admettre une solution unique.

Pour un **problème aux conditions initiales**, qui correspond classiquement au cas où la variable  $t$  représente le temps, ces conditions prennent la forme :  $y(0) = y_0$  et  $y'(0) = y_1$ , soit, physiquement, la position et la vitesse à l'instant initial sont données. Nous ne nous intéresserons ici qu'à ce type de problème.

Cependant, il ne faut pas oublier qu'il existe, pour la même équation différentielle, un autre type de problème que nous avons déjà rencontré : le **problème aux limites**. Les deux conditions sont alors partagées entre les deux extrémités de l'intervalle, par exemple :  $y(0) = y_0$  et  $y(T) = y_T$ . Ce deuxième type de problème correspond à des situations physiques complètement différentes et cela se traduit par des méthodes de résolution numériques complètement différentes.

Pour les problèmes aux conditions initiales d'ordre 2, il existe des méthodes numériques spécifiques. Cependant il est toujours possible de les ramener à un système de deux équations différentielles d'ordre 1, couplées et avec conditions initiales. En effet, posons :

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

## Éléments de théorie des équations différentielles

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Il vient :

$$U'(t) = \begin{pmatrix} U_1'(t) \\ U_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2(t) \\ g(t, y(t), y'(t)) \end{pmatrix}.$$

Donc en introduisant la fonction à *valeur vectorielle*

$$\begin{aligned} F : I \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\theta, X) &\rightarrow F(\theta, X) = \begin{pmatrix} X_2 \\ g(\theta, X_1, X_2) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

on s'est ramené au problème :

$$U'(t) = F(t, U(t)) \text{ avec } U(0) = U_0,$$

qui a la même forme que le problème (7.1.4)-(7.1.3). On a mis l'équation différentielle d'ordre 2 sous forme *normale*.

Ce résultat se généralise aux équations différentielles d'ordre  $m$

$$y^{(m)}(t) = g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t))$$

qui peuvent se ramener à un système de  $m$  équations différentielles d'ordre 1.

## Éléments de théorie des équations différentielles

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 7.1.3 Principe des méthodes numériques

**Exemples :**

[Exemple A.1.1](#)

Soit  $y(t)$  la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Le principe général consiste à discrétiser l'intervalle  $I = [t_0, t_0 + T]$ , en introduisant des points  $t_0, t_1, \dots, t_N = t_0 + T$  qui peuvent être équidistants mais ce n'est pas obligatoire. La quantité  $h_n = t_{n+1} - t_n$  s'appelle le **pas**. On veut, pour  $n = 1, \dots, N$ , calculer une approximation de  $y(t_n)$ , que l'on notera

$$z_n \approx y(t_n),$$

à l'aide d'un procédé itératif.

L'idée la plus simple consiste dans un premier temps à écrire le développement de *Taylor* de  $y(t)$  en  $t = t_n$  : comme la solution est dérivable par rapport à  $t$  au moins une fois, on peut écrire que

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) = y(t_n + h) &= y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi), \quad \xi \in [t_n, t_{n+1}] \\ &= y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



On a supposé que  $h_n$  est constant et égal à  $h = \frac{T}{N}$  où  $N$  est un entier fixé. Si l'on suppose que  $h$  est suffisamment petit, on peut alors proposer le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} z_0 = y_0, \\ z_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n), \quad 0 \leq n \leq N-1. \end{cases}$$

Ce procédé itératif s'appelle **schéma d'Euler simple** ou **schéma d'Euler explicite** . Mais nous verrons d'autres manières de l'introduire.

Une autre solution consiste à pousser le développement de Taylor à l'ordre 2, c'est ce qui est présenté dans l'exemple référencé. On y voit qu'il est alors nécessaire de calculer  $y''(t)$  soit

$$y''(t) = \frac{d}{dt}f(t, y(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) \times f(t, y(t)),$$

car  $y$  est solution de l'équation différentielle. Dans ce même exemple, on présente aussi l'application de ces deux schémas à un exemple très simple.

Enfin, ayant poussé le développement de Taylor jusqu'à l'ordre 2, il est naturel de penser à le développer à l'ordre 3, 4, ... Cependant, il suffit de calculer  $\frac{d^2}{dt^2}(f(t, y(t)))$  pour voir que cette méthode devient rapidement impraticable dans le cas général.

On distingue deux grandes familles de schémas de résolution numérique des problèmes aux conditions initiales pour les équations différentielles :

- **Les schémas à un pas**. Pour calculer une approximation de la valeur de la fonction cherchée en un point  $t_{n+1}$ , on oublie tout ce qui s'est passé avant le point  $t_n$ . Le gros avantage est de permettre de changer de pas très facilement au cours

## Principe des méthodes numériques

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

du calcul en fonction des estimations d'erreur que l'on obtient en même temps que les valeurs approchées au cours du calcul.

- **les schémas multi-pas.** Dans ces méthodes au contraire, pour calculer une approximation de la valeur de la fonction cherchée en un point  $t_{n+1}$ , on utilise les valeurs calculées en  $t_n, t_{n-1} \dots$ . Cela permet un coût de calcul moindre, mais rend les valeurs plus interdépendantes de sorte qu'il est plus difficile de changer le pas localement au cours du calcul.

## Principe des méthodes numériques

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 7.2 Les schémas à un pas

|       |                                                               |    |
|-------|---------------------------------------------------------------|----|
| 7.2.1 | Schémas d'Euler à partir de l'intégration numérique . . . . . | 15 |
| 7.2.2 | Schémas prédicteur-correcteurs à un pas . . . . .             | 17 |
| 7.2.3 | Première étude de la méthode d'Euler . . . . .                | 19 |
| 7.2.4 | Ordre et consistance des schémas à un pas . . . . .           | 22 |
| 7.2.5 | Stabilité et convergence des schémas à un pas . . . . .       | 24 |
| 7.2.6 | Les schémas de <i>Runge-Kutta</i> . . . . .                   | 27 |

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 7.2.1 Schémas d'Euler à partir de l'intégration numérique

**Exercices :**

[Exercice C.1.4](#)

**Cours :**

[Principe des méthodes numériques](#)

Pour définir certains schémas numériques de résolution d'équation différentielle, on remarque que la solution exacte  $y(t)$  vérifie  $y'(t) = f(t, y(t))$ , ce qui donne

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt.$$

On peut alors penser approcher l'intégrale par une formule utilisant des valeurs de  $f(t, y(t))$  sur l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$  bien que  $y(t)$  ne soit pas connue sur cet intervalle. Pour simplifier l'écriture, nous supposons que le pas  $h_n = t_{n+1} - t_n$  est constant,  $h = \frac{T}{N}$  où  $N$  est un entier, mais la généralisation à un pas non constant est évidente.

Pour commencer, utilisons la méthode des rectangles "à gauche" pour le calcul approché de l'intégrale, (ceci est équivalent à la formule de Taylor appliquée à  $y(t)$  en  $t = t_n$  que nous avons introduit dans le paragraphe référencé )

On peut donc proposer le schéma suivant :

$$z_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (7.2.1)$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

qui n'est autre que le **schéma d'Euler simple**. On peut aussi approcher l'intégrale avec la méthode des rectangles à droite. Un calcul équivalent provient de la formule de Taylor appliquée à  $y(t)$  en  $t = t_{n+1}$  :

$$y(t_n) = y(t_{n+1}) - hf(t_{n+1}, y(t_{n+1})) + \frac{h^2}{2} y''(\xi), \quad \xi \in [t_n, t_{n+1}].$$

Ceci conduit au schéma

$$z_{n+1} = z_n + hf(t_{n+1}, z_{n+1}), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (7.2.2)$$

que l'on nomme **schéma d'Euler rétrograde** ou **Euler implicite**. On dit que ce schéma est **implicite** car  $z_{n+1}$  est défini implicitement comme solution de l'équation

$$x = z_n + hf(t_{n+1}, x),$$

qui en général est non-linéaire. On fait alors appel à des méthodes de type point fixe ou Newton. Cependant, comme le pas  $h$  est petit, le nombre d'itérations nécessaires en pratique est petit : parfois même une seule suffit. Il reste alors à initialiser le processus avec une première estimation de  $z_{n+1}$ , qui peut être  $z_n$ .

## Schémas d'Euler à partir de l'intégration numérique

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 7.2.2 Schémas prédicteur-correcteurs à un pas

### Exercices :

#### [Exercice C.1.5](#)

Reprenons le schéma implicite d'Euler rétrograde (7.2.2) défini précédemment :

$$z_{n+1} = z_n + hf(t_{n+1}, z_{n+1}), \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

On peut construire un nouveau schéma dit prédicteur-correcteur,

- on détermine une première estimation grossière de  $z_{n+1}$ , notée  $\tilde{z}_{n+1}$ , on peut avoir recours par exemple à la méthode d'Euler explicite
- on améliore cette estimation en s'inspirant du schéma d'Euler rétrograde.

On obtient le schéma :

$$\begin{cases} \hat{z}_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n), \\ z_{n+1} = z_n + hf(t_{n+1}, \hat{z}_{n+1}). \end{cases} \quad (7.2.3)$$

Dans le langage devenu classique pour ces méthodes, on dit que l'on fait d'abord une **prédiction** ( $\hat{z}_{n+1}$ ) à l'aide du schéma explicite, puis une **correction** à l'aide du schéma implicite. En outre, on peut être conduit à itérer sur les corrections.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Voyons un autre exemple, si on utilise la méthode des trapèzes pour calculer l'intégrale de

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt,$$

cela donne l'expression

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{h}{2} (f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))) - \frac{h^3}{12} y^{(3)}(\xi), \quad \xi \in [t_n, t_{n+1}].$$

Le terme  $y^{(3)}$  correspond à la dérivée seconde par rapport à  $t$  de  $t \mapsto f(t, y(t))$ . Ceci conduit au schéma de Crank-Nicolson :

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2} (f(t_n, z_n) + f(t_{n+1}, z_{n+1})), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (7.2.4)$$

qui est implicite, comme le schéma d'Euler rétrograde.

On peut, comme précédemment, construire un nouveau schéma prédicteur-correcteur inspiré de ce schéma implicite, c'est le **schéma prédicteur-correcteur d'Euler-Cauchy** :

$$\begin{cases} \tilde{z}_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n), \\ z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2} (f(t_n, z_n) + f(t_{n+1}, \tilde{z}_{n+1})), \end{cases} \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (7.2.5)$$

**Schémas  
prédicteur-  
correcteurs à  
un pas**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 7.2.3 Première étude de la méthode d'Euler

### Exercices :

#### [Exercice C.1.6](#)

Reprenons les schémas d'Euler explicite et implicite (7.2.1), (7.2.2) :

$$z_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n), \quad n \geq 0,$$

$$z_{n+1} = z_n + hf(t_{n+1}, z_{n+1}), \quad n \geq 0.$$

Nous allons maintenant mettre en évidence deux types de difficulté de nature différente qui peuvent apparaître lorsque l'on emploie des méthodes de ce type. Pour cela, il va nous suffire d'appliquer ces schémas au **problème modèle** suivant :

$$\begin{cases} y' = -\lambda y(t), \text{ avec } \lambda > 0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Ce problème admet l'unique solution exacte :  $y(t) = y_0 e^{-\lambda t}$ .

Le schéma d'Euler explicite construit une suite de valeurs  $z_n = (1 - \lambda h)^n y_0$  et le schéma d'Euler implicite  $z_n = y_0 / (1 + \lambda h)^n$ .

**- Comportement des solutions exactes et approchées lorsque  $t \rightarrow +\infty$**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Nous constatons tout d'abord que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ .

Si nous utilisons le schéma d'Euler pour des valeurs grandes de  $n$ , avec pour simplifier les écritures un pas  $h$  constant, il faut que l'on ait aussi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$ . Or, cette condition ne sera remplie que si  $|1 - \lambda h| < 1$ , soit pour  $\lambda > 0$ , pour  $h < 2/\lambda$ . Cette condition peut se révéler très contraignante.

Pour le schéma d'Euler implicite, la suite  $z_n$  converge vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini, sans aucune condition sur  $h$ . Ainsi, nous pourrions utiliser cette méthode sans avoir a priori de condition restrictive impérative sur le pas. C'est la précision désirée qui déterminera le pas : plus le pas sera petit, meilleure sera celle-ci.

### - Étude de la convergence

Cette fois ci, nous nous plaçons en un point  $t$  fixé. Nous choisissons le pas  $h$  de manière qu'il existe toujours un entier  $n$  tel que  $nh = t$ . Alors, nous désirons que  $z_n$  soit une approximation de  $y(t)$ . Mieux que cela, nous voulons que, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , sous la contrainte  $nh = t$ , alors  $z_n$  converge vers  $y(t)$ . Il est facile de voir que pour les méthodes d'Euler, cette propriété est satisfaite. En effet on montre dans l'exercice [C.1.6](#) que

$$\lim_{h \rightarrow 0, nh=t} (1 - \lambda h)^n y_0 = \lim_{h \rightarrow 0, nh=t} y_0 / (1 + \lambda h)^n = y_0 e^{-\lambda(t)}.$$

Insistons bien sur le fait qu'il s'agit de deux points de vue distincts et complémentaires. Le premier n'a d'intérêt que pour  $t$  grand. En fait  $t$  grand peut être vite atteint. Ainsi, lorsque l'on fait des prévisions météorologiques,  $t = 10$  jours est très grand et ce sont justement les questions de stabilité qui limitent en pratique la portée de ces prévisions.

Si par contre l'on ne s'intéresse qu'à des  $t$  "petits", seule la question de la convergence importera.

## **Première étude de la méthode d'Euler**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 7.2.4 Ordre et consistance des schémas à un pas

### Exercices :

#### [Exercice C.1.7](#)

Étant donnés  $f, t_0, y_0, T$ , soit  $y(t)$  la solution exacte de

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (7.2.6)$$

On va supposer, pour simplifier l'exposé, que l'on discrétise avec un pas constant  $h = \frac{T}{N}$ , on pose  $t_n = t_0 + nh$ . Les schémas à un pas explicites ou prédicteur-correcteur peuvent se mettre sous la forme générique

$$\begin{cases} z_0 = y_0, \\ z_{n+1} = z_n + h\phi(t_n, z_n, h), \quad 0 \leq n \leq N-1, \end{cases} \quad (7.2.7)$$

On peut se demander comment quantifier l'erreur commise en approchant la solution exacte  $y(t)$  par la séquence discrète  $z_n$ . La définition suivante donne un début de réponse à cette question.

**Définition 7.2.1.** On appelle **erreur locale relative** au schéma (7.2.7) la quantité

$$\tau_{n+1}(h) = (y(t_{n+1}) - y(t_n)) - h\phi(t_n, y(t_n), h), \quad n = 0, \dots, N-1,$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

où  $y(t)$  est la solution exacte de l'équation différentielle (7.2.6).

$\tau_{n+1}(h) = y(t_{n+1}) - \tilde{z}_{n+1}$ , où  $\tilde{z}_{n+1}$  est le résultat d'un pas du schéma (7.2.7), en supposant que  $z_n = y(t_n)$ .

**Définition 7.2.2.** Lorsque qu'il existe  $K > 0$  tel que

$$\max_{1 \leq n \leq N} \left| \frac{\tau_n(h)}{h} \right| \leq Kh^p,$$

le schéma est dit **d'ordre  $p$** .

La définition suivante est propre aux schémas de résolution des équations différentielles et se déduit rapidement de l'ordre.

**Définition 7.2.3.** Le schéma est dit **consistant** quand

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq n \leq N} \left| \frac{\tau_n(h)}{h} \right| = 0.$$

Un schéma d'ordre strictement positif est donc consistant.

Pour le schéma d'Euler simple, d'après Taylor il existe  $\xi$  dans  $[t_n, t_{n+1}]$  tel que

$$\tau_{n+1}(h) = (y(t_{n+1}) - y(t_n)) - hf(t_n, y(t_n)) = \frac{h^2}{2} y''(\xi).$$

Supposons que  $y''$  est bornée sur  $[t_n, t_{n+1}]$ , soit  $|y''(t)| \leq M \forall t \in [t_0, t_0 + T]$ , alors on a

$$\tau_{n+1}(h) \leq \frac{M}{2} h^2,$$

et d'après la définition précédente, le schéma d'Euler simple est d'ordre 1. On peut vérifier que le schéma d'Euler-Cauchy est d'ordre 2 voir l'exercice C.1.7.

**Ordre et  
consistance  
des schémas à  
un pas**

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## 7.2.5 Stabilité et convergence des schémas à un pas

**Exemples :**

[Exemple A.1.2](#)

La consistance ou l'ordre d'un schéma n'est qu'une indication locale de l'erreur. Un moyen plus réaliste de mesurer l'erreur d'approximation de  $y(t_n)$  par  $z_n$  consiste à considérer l'erreur maximum commise pour  $n = 1 \dots N$ , et à regarder si cette erreur tend bien vers zéro quand  $h \rightarrow 0$ .

**Définition 7.2.4.** *Le schéma*

$$z_{n+1} = z_n + h\phi(t_n, z_n, h), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad z_0 = y_0, \quad h = \frac{T}{N}$$

est dit **convergent** par rapport à l'équation différentielle

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [t_0, t_0 + T]$$

si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq n \leq N} |y(t_n) - z_n| = 0.$$

La consistance d'un schéma n'implique pas qu'il soit convergent, nous allons voir qu'il s'agit tout au plus d'une condition nécessaire. Une condition supplémentaire fait intervenir la notion de stabilité :

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Définition 7.2.5.** *Le schéma*

$$z_{n+1} = z_n + h\phi(t_n, z_n, h), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad z_0 = y_0,$$

est dit **stable** s'il existe une constante  $M$  telle que pour tout  $z_0$ , pour tout  $u_0$ , pour tout  $h \leq h^*$  et pour toute suite  $\{\varepsilon_n\}$ , les suites  $\{z_n\}$  et  $\{u_n\}$  définies par les relations

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n + h\phi(t_n, z_n, h), \\ u_{n+1} &= u_n + h\phi(t_n, u_n, h) + \varepsilon_n, \end{aligned}$$

vérifient la condition

$$\forall n = 1 \dots N, \quad |z_n - u_n| \leq M \left( |z_0 - u_0| + \sum_{k=0}^{n-1} |\varepsilon_k| \right).$$

En gros cela signifie qu'un schéma stable n'amplifie ni les erreurs sur la condition initiale, ni les erreurs introduites dans le schéma : il s'agit d'une notion de *continuité*. On peut noter que la stabilité peut éventuellement dépendre de  $h$ . La définition ci-dessus montre qu'il peut exister un pas limite  $h^*$  au-delà duquel un schéma stable devient instable. On a aussi une condition suffisante de stabilité :

**Proposition 7.2.6.** *Pour qu'un schéma soit stable, il suffit qu'il existe une constante  $\Lambda$  telle que*

$$\forall t \in [t_0, t_0 + T], \forall z, u \in \mathbb{R}, \forall h \in [0, h^*], |\phi(t, z, h) - \phi(t, u, h)| \leq \Lambda |z - u|.$$

**Stabilité et  
convergence  
des schémas à  
un pas**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Cela signifie que la fonction  $\phi$  doit vérifier la condition de Lipschitz sur son deuxième argument. En général on montre que  $f$  vérifie une condition de Lipschitz pour obtenir cette propriété pour  $\phi$ . Dans ce cas, le schéma d'Euler simple est évidemment stable, puisque l'on a  $\phi(t, z, h) = f(t, z)$ .

Le théorème suivant est simple et essentiel ; il est généralement connu sous le nom de **consistance plus stabilité impliquent convergence**.

**Théorème 7.2.7.** *Soit  $\phi$  une fonction continue de  $t \in [t_0, t_0 + T]$ ,  $z \in \mathbb{R}$  et  $h$ , définissant le schéma à un pas*

$$z_{n+1} = z_n + h\phi(t_n, z_n, h), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad z_0 = y_0, \quad h = \frac{T}{N}.$$

*Si ce schéma à un pas est consistant et s'il est stable, alors il est convergent par rapport à l'équation différentielle*

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [t_0, t_0 + T].$$

L'exemple référencé traite du schéma d'Euler-Cauchy.

## Stabilité et convergence des schémas à un pas

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 7.2.6 Les schémas de *Runge-Kutta*

### Documents :

[Document B.1.3](#)

[Document B.1.4](#)

Il s'agit de schémas qui permettent de retrouver les bonnes propriétés des schémas de Taylor (ordre élevé), sans en présenter les inconvénients (calcul des dérivées successives de  $f$ ).

Il existe classiquement deux manières de les construire. Nous en présentons une ici. L'autre est introduite dans le document référencé.

Il s'agit de schémas à un pas, donc se mettant sous la forme

$$\begin{cases} z_0 = y_0, \\ z_{n+1} = z_n + h\phi(t_n, z_n, h), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

où  $\phi$  prend la forme particulière suivante :

$$\phi(t, z, h) = \sum_{i=1}^q \gamma_i k_i, \quad (7.2.8)$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

et les  $k_i$  sont définis récursivement de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(t, z), \\ k_2 = f(t + h\alpha_1, z + h\beta_{11}k_1), \\ k_3 = f(t + h\alpha_2, z + h\beta_{21}k_1 + h\beta_{22}k_2), \\ \vdots \\ k_q = f\left(t + h\alpha_{q-1}, z + h\sum_{p=1}^{q-1} \beta_{q-1,p}k_p\right). \end{array} \right. \quad (7.2.9)$$

L'introduction des ces  $q$  valeurs intermédiaires a pour but d'approcher un schéma de Taylor d'ordre  $q$ . Pour cela il faut déterminer les inconnues qui sont

$$[\gamma_i]_{i=1\dots q}, [\alpha_i]_{i=1\dots q-1}, [\beta_{ij}]_{i=1\dots q-1, j=1\dots i}.$$

Il est difficile d'élaborer une méthode permettant de déterminer ces inconnues pour une valeur quelconque de  $q$ , c'est pourquoi nous allons nous contenter de raisonner sur un exemple, ici pour  $q = 2$ , puis nous donnerons sans démonstration les valeurs obtenues pour  $q = 4$ , qui est la valeur la plus couramment utilisée dans la pratique.

Un schéma de Taylor d'ordre 2 s'écrit

$$z_{n+1} = z_n + h\psi(t_n, z_n, h),$$

où

$$\psi(t, z, h) = f(t, z) + \frac{h}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial t}(t, z) + f(t, z) \frac{\partial f}{\partial y}(t, z) \right), \quad (7.2.10)$$

## Les schémas de Runge-Kutta

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Pour  $q = 2$  la fonction  $\phi(t, z, h)$  définie par (7.2.8)-(7.2.9) s'écrit

$$\begin{aligned}\phi(t, z, h) &= \gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2 \\ &= \gamma_1 f(t, z) + \gamma_2 f(t + h\alpha_1, z + h\beta_1 f(t, z)),\end{aligned}$$

où l'on a posé  $\beta_1 = \beta_{11}$ . On va essayer d'identifier les coefficients inconnus  $\gamma_1, \gamma_2, \alpha_1, \beta_1$  de façon à ce que  $\phi(t, z, h)$  et  $\psi(t, z, h)$  soient les plus proches possibles. Pour cela on développe

$$f(t + h\alpha_1, z + h\beta_1 f(t, z))$$

à l'aide d'un développement de Taylor suivant les deux variables, ce qui donne à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}f(t + u, z + v) &= f(t, z) + u \frac{\partial f}{\partial t}(t, z) + v \frac{\partial f}{\partial y}(t, z) \\ &+ \frac{u^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi, \eta) + uv \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(\xi, \eta) + \frac{v^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi, \eta),\end{aligned}$$

où  $(\xi, \eta) \in [t, t + u] \times [z, z + v]$ . Nous obtenons ainsi

$$f(t + h\alpha_1, z + h\beta_1 f(t, z)) = f(t, z) + h\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial t}(t, z) + h\beta_1 f(t, z) \frac{\partial f}{\partial y}(t, z) + \mathcal{O}(h^2),$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\phi(t, z, h) = (\gamma_1 + \gamma_2) f(t, z) + \gamma_2 \left( h\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial t}(t, z) + h\beta_1 f(t, z) \frac{\partial f}{\partial y}(t, z) \right) + \mathcal{O}(h^2).$$

Si l'on néglige le reste on peut alors identifier cette expression avec  $\psi(t, z, h)$  donné par (7.2.10); on obtient alors les équations suivantes :

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 &= 1, \\ \gamma_2 \alpha_1 &= \frac{1}{2}, \\ \gamma_2 \beta_1 &= \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Comme il y a trois équations pour quatre inconnues, il y a une infinité de possibilités pour le choix des coefficients; nous ne donnerons ici que les plus populaires :

—  $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1, \alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{2}$ , qui donnent le schéma

$$z_{n+1} = z_n + hf \left( t_n + \frac{1}{2}h, z_n + \frac{1}{2}hf(t_n, z_n) \right), \quad (7.2.11)$$

appelé **schéma du point milieu**.

—  $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}, \alpha_1 = \beta_1 = 1$ , qui donnent le schéma bien connu

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2} (f(t_n, z_n) + f(t_{n+1}, z_n + hf(t_n, z_n))),$$

puisque'il s'agit du schéma d'Euler-Cauchy (7.2.5).

Ces schémas sont bien sûr d'ordre 2 puisque l'on a

$$\phi(t_n, z_n, h) + \mathcal{O}(h^2) = \psi(t_n, z_n, h),$$

ce qui permet de conserver l'ordre de l'erreur locale du schéma de Taylor utilisé.

## Les schémas de Runge-Kutta

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Le choix le plus courant est  $q = 4$ . Cela donne le **schéma de Runge-Kutta d'ordre 4**, ou en abrégé **RK4**, utilisé presque universellement<sup>2</sup> dans les sciences de l'ingénieur :

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, z_n), \\ k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 = f(t_{n+1}, z_n + hk_3), \end{cases}$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Dans le deuxième document référencé, vous pourrez lire comment on peut adapter le pas du maillage pour augmenter l'efficacité de l'algorithme. On parle alors de maillage adaptatif.

---

2. parfois même à tort!

## Les schémas de Runge-Kutta

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 7.3 Les schémas multi-pas

|       |                                                                  |    |
|-------|------------------------------------------------------------------|----|
| 7.3.1 | Les schémas d' <i>Adams-Bashforth</i> . . . . .                  | 33 |
| 7.3.2 | Quelques exemples de schémas d' <i>Adams-Bashforth</i> . . . . . | 36 |
| 7.3.3 | Les schémas implicites d' <i>Adams-Moulton</i> . . . . .         | 37 |
| 7.3.4 | Quelques exemples de schémas d' <i>Adams-Moulton</i> . . . . .   | 40 |
| 7.3.5 | Références bibliographiques . . . . .                            | 41 |

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

### 7.3.1 Les schémas d'*Adams-Bashforth*

Cours :

[Adams-Bashforth - Exemples](#)

La solution exacte  $y(t)$  de l'équation différentielle, vérifie

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt.$$

Certains schémas sont basés sur une approximation de

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt, \quad (7.3.1)$$

par des formules de quadrature à un et deux points. Ici on approche cette intégrale par la quantité

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} p(t) dt, \quad (7.3.2)$$

où  $p(t)$  est l'unique polynôme de degré  $q$  vérifiant

$$p(t_i) = f(t_i, y(t_i)), \quad i = n, n-1, \dots, n-q.$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Si l'on écrit ce polynôme sur la base de Lagrange, on a

$$p(t) = \sum_{k=0}^q \mathcal{L}_k(t) f(t_{n-k}, y(t_{n-k})),$$

et donc

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} p(t) dt = h \sum_{k=0}^q b_k f(t_{n-k}, y(t_{n-k})),$$

avec

$$b_k = \frac{1}{h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathcal{L}_k(t) dt. \quad (7.3.3)$$

Soit donc le schéma suivant, appelé **schéma d'Adams-Bashforth** à  $q+1$  pas :

$$z_{n+1} = z_n + h \sum_{k=0}^q b_k f(t_{n-k}, z_{n-k}), \quad n \geq q. \quad (7.3.4)$$

Ce schéma à  $q+1$  pas fait intervenir  $q+1$  points où la fonction  $f$  est évaluée (les  $(t_{n-k}, z_{n-k})$ , pour  $k = 0, \dots, q$ ). On dit que c'est un schéma à  $q+1$  pas et  $q+1$  nœuds.

Ce schéma n'est valable qu'à partir de  $n = q$ , c'est pourquoi dans la pratique on a besoin d'approcher les  $q$  premières valeurs  $z_1, \dots, z_q$  par un schéma à un pas d'ordre suffisamment élevé (par exemple Runge-Kutta).

Remarquons que les coefficients  $b_k$  donnés par la formule (7.3.3) sont indépendants de  $h$ . En effet on a

$$b_k = \frac{1}{h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \prod_{j=0, j \neq k}^q \frac{t - t_{n-j}}{t_{n-k} - t_{n-j}} dt,$$

## Les schémas d'Adams- Bashforth

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

et si l'on pose  $s = \frac{t - t_n}{h}$ ,

$$b_k = \int_0^1 \prod_{j=0, j \neq k}^q \frac{j+s}{j-k} ds,$$

expression qui montre bien que  $h$  n'intervient pas.

On peut regarder ce que donne cette approche pour  $q = 1$  :

$$b_0 = \int_0^1 (s+1) ds = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad b_1 = - \int_0^1 s ds = -\frac{1}{2},$$

et donc le schéma d'Adams-Bashforth à deux pas prend la forme suivante :

$$z_{n+1} = z_n + h \left[ \frac{3}{2} f(t_n, z_n) - \frac{1}{2} f(t_{n-1}, z_{n-1}) \right], \quad n \geq 1.$$

De façon générale, les schémas d'Adams-Bashforth

$$z_{n+1} = z_n + h \sum_{k=0}^q b_k f(t_{n-k}, z_{n-k}), \quad n \geq q.$$

avec les  $b_k$  donnés par (7.3.3) sont d'ordre  $q$ . Les notions d'ordre, de consistance et de stabilité des schémas multi-pas sont légèrement différentes de celles concernant les schémas à un pas. Nous n'en parlerons pas dans le cadre de ce cours, elles sont très bien traitées dans l'ouvrage<sup>3</sup> p. 257-268.

Vous trouverez dans le paragraphe de cours référencé ces schémas pour quelques valeurs de  $q$ .

3. BURDEN, R.L. ET FAIRES, J.D. : *Numerical Analysis* - Pws-Kent, Boston

## Les schémas d'Adams- Bashforth

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 7.3.2 Quelques exemples de schémas d'Adams-Bashforth

Voici quelques schémas d'Adams-Bashforth correspondant à quelques valeurs de  $q$ .

— **Adams-Bashforth à deux pas** (et deux nœuds)

$$z_{n+1} = z_n + h \left[ \frac{3}{2} f(t_n, z_n) - \frac{1}{2} f(t_{n-1}, z_{n-1}) \right], \quad n \geq 1,$$

Erreur locale  $\tau_{n+1}(h) = \frac{5}{12} y^{(3)}(\eta) h^3$ ,  $\eta \in [t_{n-1}, t_{n+1}]$ .

— **Adams-Bashforth à trois pas** (et trois nœuds)

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{12} [23f(t_n, z_n) - 16f(t_{n-1}, z_{n-1}) + 5f(t_{n-2}, z_{n-2})], \quad n \geq 2,$$

Erreur locale  $\tau_{n+1}(h) = \frac{3}{8} y^{(4)}(\eta) h^4$ ,  $\eta \in [t_{n-2}, t_{n+1}]$ .

— **Adams-Bashforth à quatre pas** (et quatre nœuds)

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{24} [55f(t_n, z_n) - 59f(t_{n-1}, z_{n-1}) + 37f(t_{n-2}, z_{n-2}) - 9f(t_{n-3}, z_{n-3})], \quad n \geq 3,$$

Erreur locale  $\tau_{n+1}(h) = \frac{251}{720} y^{(5)}(\eta) h^5$ ,  $\eta \in [t_{n-3}, t_{n+1}]$ .

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 7.3.3 Les schémas implicites d'Adams-Moulton

Cours :

[Adams-Moulton - Exemples](#)

Nous allons procéder de la même manière que pour les schémas d'Adams-Bashforth. Cette fois-ci cependant, nous allons approcher l'intégrale (7.3.1) par la quantité

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} p(t) dt,$$

où  $p(t)$  est l'unique polynôme de degré  $q+1$  vérifiant

$$p(t_i) = f(t_i, y(t_i)), \quad i = n+1, n, n-1, \dots, n-q,$$

c'est-à-dire que l'on inclut  $y(t_{n+1})$  dans les valeurs "connues", c'est pourquoi nous obtenons ainsi une famille de schémas multi-pas implicites appelés schémas d'**Adams-Moulton** à  $q+1$  pas :

$$z_{n+1} = z_n + h \sum_{k=-1}^q b_k f(t_{n-k}, z_{n-k}), \quad n \geq q. \quad (7.3.5)$$

Ce schéma est un schéma à  $q+1$  pas et  $q+2$  nœuds (les  $(t_{n-k}, z_{n-k})$ , pour  $k = -1, \dots, q$ ).

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Les coefficients  $b_k$ , qui se calculent comme pour les schémas d'Adams-Bashforth, sont obtenus par la formule

$$b_k = \int_0^1 \prod_{j=-1, j \neq k}^q \frac{j+s}{j-k} ds, \quad k = -1, 0, \dots, q.$$

Pour  $q = 1$ , on retrouve le schéma de Crank-Nicolson (parfois appelé Euler-Centré) (7.2.4) :

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2} [f(t_{n+1}, z_{n+1}) + f(t_n, z_n)], \quad n \geq 0,$$

Erreur locale  $\tau_{n+1}(h) = -\frac{1}{12} y^{(3)}(\eta) h^3$ ,  $\eta \in [t_{n-1}, t_{n+1}]$ .

Vous trouverez dans le paragraphe référencé ces schémas pour d'autres valeurs de  $q$ .

En pratique les schémas d'Adams-Moulton ne sont pas utilisés comme tels, car ils sont implicites, et donc chercher à obtenir  $z_{n+1}$  à l'aide d'une méthode de point fixe ou de Newton ferait perdre l'avantage obtenu en réutilisant les valeurs précédentes de  $f$ . On utilise plutôt conjointement un schéma d'Adams-Bashforth et un schéma d'Adams-Moulton de même ordre pour construire un schéma prédicteur-correcteur, en utilisant comme valeur de  $z_{n+1}$  dans le schéma d'Adams-Moulton la valeur prédite par le schéma Adams-Bashforth. Le prédicteur-correcteur le plus utilisé utilise ces deux schémas à

## Les schémas implicites d'Adams- Moulton

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

l'ordre 4 :

$$\begin{aligned} \text{Prédicteur : } \tilde{z}_{n+1} = z_n &+ \frac{h}{24} [55f(t_n, z_n) - 59f(t_{n-1}, z_{n-1}) \\ &+ 37f(t_{n-2}, z_{n-2}) - 9f(t_{n-3}, z_{n-3})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Correcteur : } z_{n+1} = z_n &+ \frac{h}{24} [9f(t_{n+1}, \tilde{z}_{n+1}) + 19f(t_n, z_n) \\ &- 5f(t_{n-1}, z_{n-1}) + f(t_{n-2}, z_{n-2})]. \end{aligned}$$

On peut montrer que l'ordre de l'erreur locale de chacun des deux schémas (ici 4) est conservé.

**Les schémas  
implicites  
d'Adams-  
Moulton**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 7.3.4 Quelques exemples de schémas d'Adams-Moulton

Voici quelques schémas d'Adams-Moulton correspondant à quelques valeurs de  $q$ .

— **Adams-Moulton à deux pas** (et trois nœuds)

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{12} [5f(t_{n+1}, z_{n+1}) + 8f(t_n, z_n) - f(t_{n-1}, z_{n-1})], \quad n \geq 1,$$

Erreur locale  $\tau_{n+1}(h) = -\frac{1}{24}y^{(4)}(\eta)h^4$ ,  $\eta \in [t_{n-1}, t_{n+1}]$ .

— **Adams-Moulton à trois pas** (et quatre nœuds)

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n + \frac{h}{24} [9f(t_{n+1}, z_{n+1}) + 19f(t_n, z_n) \\ &\quad - 5f(t_{n-1}, z_{n-1}) + f(t_{n-2}, z_{n-2})], \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

Erreur locale  $\tau_{n+1}(h) = -\frac{19}{720}y^{(5)}(\eta)h^5$ ,  $\eta \in [t_{n-2}, t_{n+1}]$ .

— **Adams-Moulton à quatre pas** (et cinq nœuds)

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n + \frac{h}{720} [251f(t_{n+1}, z_{n+1}) + 646f(t_n, z_n) - 264f(t_{n-1}, z_{n-1}) \\ &\quad + 106f(t_{n-2}, z_{n-2}) - 19f(t_{n-3}, z_{n-3})], \quad n \geq 3, \end{aligned}$$

Erreur locale  $\tau_{n+1}(h) = -\frac{3}{160}y^{(6)}(\eta)h^6$ ,  $\eta \in [t_{n-3}, t_{n+1}]$ .

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 7.3.5 Références bibliographiques

### — Références pédagogiques en français

- CROUZEIX, M. ; MIGNOT, A. L. : *Analyse numérique des équations différentielles*, Masson, Paris 1984.
- DEMAILLY, J. P. : *Analyse numérique et équations différentielles*, Presses universitaires de Grenoble, Grenoble, 1991.
- SCHATZMANN, M. : *Analyse numérique, cours et exercices pour la licence*, InterEditions, Paris, 1991.

### — Une référence classique historique

- HENRICI, P. : *Discrete variable methods in ordinary differential equations*, John Wiley and sons, New York, 1962.

### — Références avec A-stabilité

- GEAR, C. W. : *Numerical initial value problems in ordinary differential equations*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.
- HALL, G. ; WATT, J. M. (editors) : *Modern numerical methods for ordinary differential equations*, Clarendon Press, Oxford, 1976.
- LAMBERT, J. D. : *Computational methods in ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1973.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## — Références historiques

- BASHFORTH, F. and ADAMS, J. C. , *Theory of Capillary Action*, Cambridge U. P. , New-York, 1883.
- DAHLQUIST, G. , 'A special stability problem for linear multistep methods', *BIT*, **3**, 27-43 (1963).
- HEUN, K. 'Neue Methode zur approximativen Integration der Differentialgleichungen einer unabhängigen Veränderlichen', *Z. Math. Physik*, **45**, 23-38 (1900).
- MOULTON, F. R., *New Methods in Exterior Ballistics*, U. of Chicago, Chicago, 1926.

## Références bibliogra- phiques

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

# Annexe A

## Exemples

A.1 Exemples du chapitre 7 . . . . . 44

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## A.1 Exemples du chapitre 7

|       |                                                                |    |
|-------|----------------------------------------------------------------|----|
| A.1.1 | Euler simple, application du développement de Taylor . . . . . | 45 |
| A.1.2 | Stabilité de Euler-Cauchy . . . . .                            | 49 |

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exemple A.1.1 Euler simple, application du développement de Taylor

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t), & t \in [0, 1], \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Ici on a  $f(t, y) = -y$ , et donc le schéma d'Euler simple donne les itérations suivantes sur  $z_n$  :

$$\begin{cases} z_0 = 1, \\ z_{n+1} = (1-h)z_n, & 0 \leq n \leq N-1. \end{cases}$$

La Figure A.1.1 permet de comparer la solution exacte  $y(t) = \exp(-t)$  avec l'approximation obtenue avec le schéma aux points  $t_n$ , avec ici  $h = 0.2$ .

Il est clair que l'approximation donnée par le schéma d'Euler simple n'est pas très bonne et que l'on pourrait certainement l'améliorer en prenant un  $h$  plus petit ou en considérant le schéma correspondant à un développement de Taylor à l'ordre 2 :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + \frac{h^3}{6}y''' \xi.$$

Puisque l'on a

$$y''(t) = \frac{d}{dt}f(t, y(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + f(t, y(t))\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)),$$

on peut donc écrire

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y(t_n)) + f(t_n, y(t_n))\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n)) \right) + \mathcal{O}(h^3)$$

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

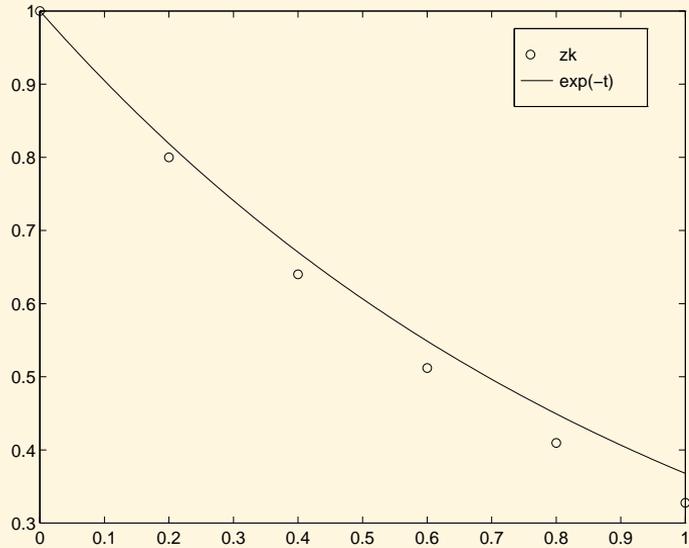


FIGURE A.1.1 – Approximations obtenues avec le schéma d'Euler Simple ( $h = 0.2$ )

### Exemple A.1.1

Euler simple,  
application du  
développement  
de Taylor

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

et proposer le schéma suivant :

$$\begin{cases} z_0 = y_0, \\ z_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n) + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, z_n) + f(t_n, z_n) \frac{\partial f}{\partial y}(t, z_n) \right), \quad 0 \leq n \leq N-1. \end{cases}$$

Sur l'exemple, ce schéma donne les itérations suivantes :

$$\begin{cases} z_0 = 1, \\ z_{n+1} = (1 - h + \frac{h^2}{2})z_n, \quad 0 \leq n \leq N-1, \end{cases}$$

et les approximations  $z_k$  représentées sur la Figure A.1.2. Il est clair que ce schéma est meilleur, à pas égal, que le schéma d'Euler simple, mais ceci au prix du calcul de deux dérivées partielles de  $f$ , ce qui n'est pas toujours possible, par exemple quand  $f$  est le résultat d'un code de calcul trop complexe. C'est pourquoi les méthodes basées sur le développement de Taylor sont très peu utilisées dans la pratique.

[retour au cours](#)

### Exemple A.1.1

Euler simple,  
application du  
développement  
de Taylor

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

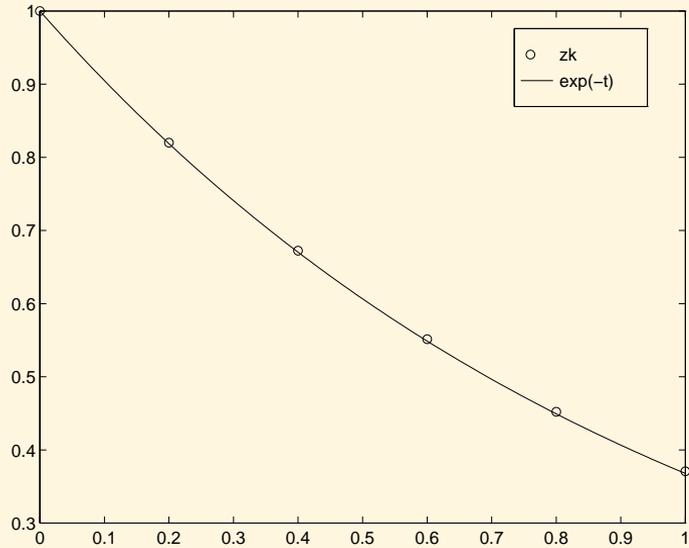


FIGURE A.1.2 – Approximations obtenues avec le schéma de Taylor d'ordre 2 ( $h = 0.2$ )

### Exemple A.1.1

Euler simple,  
application du  
développement  
de Taylor

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exemple A.1.2** Stabilité de Euler-Cauchy

Considérons le schéma d'Euler-Cauchy :

$$\begin{cases} \tilde{z}_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n), \\ z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}(f(t_n, z_n) + f(t_{n+1}, \tilde{z}_{n+1})), \end{cases} n \geq 0.$$

Pour ce schéma on a

$$\phi(t, z, h) = \frac{1}{2}f(t, z) + \frac{1}{2}f(t+h, z+hf(t, z)),$$

et pour  $u \in \mathbb{R}$  on a

$$\begin{aligned} \phi(t, z, h) - \phi(t, u, h) &= \frac{1}{2}(f(t, z) - f(t, u)) \\ &+ \frac{1}{2}(f(t+h, z+hf(t, z)) \\ &- f(t+h, u+hf(t, u))). \end{aligned}$$

Si  $f$  vérifie une condition de Lipschitz, on a

$$\begin{aligned} |\phi(t, z, h) - \phi(t, u, h)| &\leq \frac{L}{2}|z-u| + \frac{L}{2}|z+hf(t, z) - u - hf(t, u)|, \\ &\leq L|z-u| + \frac{L}{2}|hf(t, z) - hf(t, u)|, \\ &\leq L|z-u| + \frac{hL^2}{2}|z-u|, \\ &\leq \left(L + \frac{hL^2}{2}\right)|z-u|. \end{aligned}$$

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

La fonction  $\phi$  vérifie donc la condition de Lipschitz avec

$$\Lambda = L + \frac{hL^2}{2}.$$

Le schéma d'Euler-Cauchy est donc stable. On a démontré qu'il est consistant, il est donc convergent.

[retour au cours](#)

**Exemple A.1.2**  
Stabilité de  
Euler-Cauchy

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

# Annexe B

## Documents

B.1 Documents du chapitre 7 ..... 52

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## B.1 Documents du chapitre 7

|       |                                                  |    |
|-------|--------------------------------------------------|----|
| B.1.1 | Rappel sur la différentiation . . . . .          | 53 |
| B.1.2 | Condition de Lipschitz . . . . .                 | 54 |
| B.1.3 | Définition des méthodes de Runge-Kutta . . . . . | 56 |
| B.1.4 | Adaptation automatique du pas . . . . .          | 60 |

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Document B.1.1 Rappel sur la différentiation

Soient  $n, p, q$  trois entiers  $> 0$ .

Soit  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}^q$ , dont on note les variables muettes “ $x$ ” et “ $y$ ”. On suppose que  $f$  est continûment dérivable ( $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$ ). On note donc les dérivées partielles par rapport à la première et à la seconde variables  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . Soit  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ . La dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  est une matrice de taille  $(q \times n)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  est une matrice de taille  $(q \times p)$ .

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On se donne maintenant deux fonctions  $\mathcal{C}^1(I)$  notées  $u : t \in I \mapsto u(t) \in \mathbb{R}^n$  et  $v : t \in \mathbb{R} \mapsto v(t) \in \mathbb{R}^p$ . On prend  $t_0 \in I$ . La dérivée  $u'(t_0) = \frac{du}{dt}(t_0)$  est un vecteur colonne de  $\mathcal{M}_{n,1}$ , et de même  $v'(t_0) = \frac{dv}{dt}(t_0) \in \mathcal{M}_{p,1}$ .

Soit enfin la fonction d’une variable  $\varphi : t \in I \mapsto \varphi(t) \in \mathbb{R}^q$ , définie par  $\varphi(t) = f(u(t), v(t))$ . En tant que composée de fonctions  $\mathcal{C}^1$ ,  $\varphi$  est  $\mathcal{C}^1$ . Alors sa dérivée au point  $t_0 \in I$  s’écrit

$$\varphi'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(u(t_0), v(t_0)) \frac{du}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(t_0), v(t_0)) \frac{dv}{dt}(t_0) \in \mathcal{M}_{q,1}.$$

Noter que les produits entre matrices sont compatibles :  $\frac{\partial f}{\partial x}(u(t_0), v(t_0)) \in \mathcal{M}_{q,n}$  et  $u'(t_0) \in \mathcal{M}_{n,1}$  par exemple.

[retour au cours](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Document B.1.2 Condition de Lipschitz

**Définition B.1.1.** Soit  $g$  une fonction définie sur  $D \subset \mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$ , on dit que  $g$  vérifie une condition de **Lipschitz** (ou qu'elle est **lipschitzienne**) s'il existe une constante  $L > 0$  telle que

$$\forall x, y \in D, \quad \|g(x) - g(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

**Théorème B.1.2** (Cauchy-Lipschitz). On suppose que la fonction  $f$  est lipschitzienne en  $y$ , c'est-à-dire qu'il existe une constante  $L > 0$  telle que

$$\forall t \in I, \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|,$$

alors le problème

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)), \quad t \in I, \\ y(t_0) &= y_0, \quad t_0 \in I, \end{cases}$$

admet une solution unique.

Soit le problème

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{y(t)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

dont la solution n'est pas unique. Alors on voit que  $f$  ne satisfait pas la condition de Lipschitz. En effet, il vient

$$f(t, y) - f(t, z) = \sqrt{y} - \sqrt{z} = \frac{y - z}{\sqrt{y} + \sqrt{z}}$$

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

et le dénominateur est nul en l'origine.

[retour au cours](#)

**Document**  
**B.1.2**  
Condition de  
Lipschitz

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Document B.1.3 Définition des méthodes de Runge-Kutta

Une méthode à un pas n'utilise que le point  $(t_n, z_n)$  pour calculer  $(t_{n+1}, z_{n+1})$ . Il va donc falloir pour obtenir des méthodes d'ordre suffisamment élevé, introduire des points intermédiaires. Soit donc le problème de Cauchy ci-dessous

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & t \in [t_0, t_0 + T], \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (\text{B.1.1})$$

On cherche à le discrétiser par rapport à une subdivision  $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T$ . L'idée est donc de calculer le point  $(t_{n+1}, z_{n+1})$  à partir du point  $(t_n, z_n)$  en utilisant des points intermédiaires  $(t_{n,i}, z_{n,i})$ . À chacun de ces points, on associe la "pente"

$$p_{n,i} = f(t_{n,i}, z_{n,i}).$$

qui est en fait une approximation de la pente  $y'(t_{n,i})$  de la tangente à la courbe représentative de la fonction  $y$  au point  $t_{n,i}$ .

Ces points intermédiaires vont être les nœuds d'une formule d'intégration numérique (Q) (Q, comme quadrature) :

$$\int_0^1 g(\tau) d\tau \simeq \sum_{i=1}^q b_i g(c_i) \quad (\text{Q})$$

qui servira à approcher l'expression exacte

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt,$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

soit, après passage de l'intervalle de référence  $[0, 1]$  à l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$  :

$$t_{n,i} = t_n + c_i h_n, \quad c_i \in [0, 1],$$

$$z_{n+1} = z_n + h_n \sum_{i=1}^q b_i f(t_{n,i}, z_{n,i}),$$

Pour obtenir, un schéma numérique, il reste à construire les approximations  $z_{n,i}$ . Pour ce faire, on a à nouveau recours à l'intégration numérique, mais pour éviter d'introduire indéfiniment de nouveaux points intermédiaires, ces nouvelles formules de quadrature n'utiliseront que les nœuds  $c_i$  précédents.

On se donne alors pour chaque point  $(t_{n,i}, z_{n,i})$ , un méthode d'intégration numérique, que l'on définit sur chaque intervalle de référence, ici  $[0, c_i]$  :

$$\int_0^{c_i} g(\tau) d\tau \simeq \sum_{j=1}^q a_{ij} g(c_j), \quad (Q_i)$$

Soit alors  $y(t)$  une solution exacte de (B.1.1). On a

$$\begin{aligned} y(t_{n,i}) &= y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n,i}} f(t, y(t)) dt \\ &= y(t_n) + h_n \int_0^{c_i} f(t_n + u h_n, y(t_n + u h_n)) du \end{aligned}$$

où l'on a fait le changement de variable  $t = t_n + u h_n$ . De même,

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h_n \int_0^1 f(t_n + u h_n, y(t_n + u h_n)) du.$$

## Document

### B.1.3

Définition des  
méthodes de  
Runge-Kutta

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

Lorsque l'on applique ces méthodes à  $g(u) = f(t_n + u h_n, y(t_n + u h_n))$ , il vient

$$\begin{cases} y(t_{n,i}) & \simeq y(t_n) + h_n \sum_{j=1}^q a_{ij} f(t_{n,j}, y(t_{n,j})), & i = 1, \dots, q \\ y(t_{n+1}) & \simeq y(t_n) + h_n \sum_{i=1}^q b_i f(t_{n,i}, y(t_{n,i})), \end{cases}$$

D'où la méthode de Runge-Kutta correspondante :

$$\begin{cases} t_{n,i} & = t_n + \tau_i h_n, \\ z_{n,i} & = z_n + h_n \sum_{j=1}^q a_{ij} p_{n,j}, \\ p_{n,i} & = f(t_{n,i}, z_{n,i}) \\ t_{n+1} & = t_n + h_n, \\ z_{n+1} & = z_n + h_n \sum_{i=1}^q b_i p_{n,i}, \end{cases}$$

On voit qu'il s'agit bien de méthodes à un pas avec

$$\begin{cases} \Phi(t, z, h) = \sum_{i=1}^q b_i f(t + c_i h, z_i), \text{ avec} \\ z_i = z + h \sum_{j=1}^q a_{ij} f(t + c_j h, z_j), 1 \leq i \leq q. \end{cases}$$

les méthodes de Runge-Kutta correspondantes sont *explicites* : le calcul de  $z_{n+1}$  se fait à partir de la valeur de  $z_n$  sans avoir besoin de résoudre d'équation. Si la sommation sur  $j$  se fait de 1 à  $i$ , la méthode est dite *semi-implicite*. Si elle va au-delà (jusqu'à  $q$ , au maximum), elle est dite *implicite*. Alors, il faut résoudre, à chaque pas, une équation, en général non linéaire, pour calculer  $z_{n+1}$  à partir de  $z_n$ .

## Document

### B.1.3

Définition des  
méthodes de  
Runge-Kutta

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

[retour au cours](#)

**Document**

**B.1.3**

Définition des  
méthodes de  
Runge-Kutta

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Document B.1.4 Adaptation automatique du pas

La convergence d'un schéma traduit le fait que l'erreur globale  $|y(t_n) - w_n|$  tend vers zéro en tous les points de la subdivision, lorsque le nombre de ces points tend vers l'infini. Comme le montre le théorème suivant, elle est directement reliée à l'erreur locale, et c'est cette relation qui justifie la suite de ce paragraphe :

**Théorème B.1.3.** *Soit le schéma à un pas*

$$\begin{cases} z_0 &= y_0, \\ z_{n+1} &= z_n + h\phi(t_n, z_n, h), \quad n \geq 0, \end{cases} \quad (\text{B.1.2})$$

*approchant la solution de l'équation différentielle*

$$y'(t) = f(t, y), \quad t \in [t_0, t_0 + T], \quad y(t_0) = y_0.$$

*Si le schéma est convergent pour  $h < h^*$ , et si l'erreur locale  $\tau_{n+1}(h)$  vérifie*

$$\left| \frac{\tau_{n+1}(h)}{h} \right| \leq \epsilon(h), \quad \forall n, \quad \forall h < h^*$$

*alors on a la majoration*

$$|y(t_n) - z_n| \leq \frac{\epsilon(h)}{L} e^{L(t_n - t_0)}, \quad \forall n,$$

*où  $L$  est la constante de Lipschitz de la fonction  $\phi$  relative au schéma (B.1.2).*

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

On peut donc contrôler l'erreur globale, pour peu que l'on puisse imposer à l'erreur locale de ne pas dépasser un certain seuil de tolérance. Cela permettrait par exemple d'utiliser un minimum de pas de temps, tout en respectant cette tolérance. Malheureusement, et ce n'est pas une surprise, avoir le minimum de pas de temps tout en contrôlant l'erreur globale est un objectif impossible à réaliser si le pas  $h$  reste constant.

On peut estimer l'erreur locale en procédant de la façon suivante : supposons que nous disposons d'un schéma à un pas d'ordre  $p$

$$\begin{cases} z_0 = y_0, \\ z_{n+1} = z_n + h\phi(t_n, z_n, h), \quad n \geq 0. \end{cases} \quad (\text{B.1.3})$$

L'erreur locale associée à ce schéma est donnée par la quantité

$$\tau_{n+1}(h) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h\phi(t_n, y(t_n), h) = \mathcal{O}(h^{p+1}),$$

où  $y$  désigne la solution de l'équation différentielle originale. On se donne un deuxième schéma

$$\begin{cases} \tilde{z}_0 = y_0, \\ \tilde{z}_{n+1} = \tilde{z}_n + h\tilde{\phi}(t_n, \tilde{z}_n, h), \quad n \geq 0, \end{cases} \quad (\text{B.1.4})$$

d'ordre  $p + 1$ , dont l'erreur locale  $\tilde{\tau}_{n+1}(h)$  vérifie donc

$$\tilde{\tau}_{n+1}(h) = \mathcal{O}(h^{p+2}).$$

Supposons que l'on dispose de  $z_n$  pour un  $n \geq 0$  donné, et appliquons les deux schémas pour obtenir une approximation de  $y(t_{n+1})$  : on a

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n + h\phi(t_n, z_n, h), \\ \tilde{z}_{n+1} &= z_n + h\tilde{\phi}(t_n, z_n, h). \end{aligned}$$

**Document**  
**B.1.4**  
Adaptation  
automatique du  
pas

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

Si l'on fait l'hypothèse que  $z_n = y(t_n)$  (vraie pour  $n = 0!$ ), on peut écrire que

$$\begin{aligned}\tau_{n+1}(h) &= y(t_{n+1}) - z_n - h\phi(t_n, z_n, h), \\ &= y(t_{n+1}) - z_n - (z_{n+1} - z_n) = y(t_{n+1}) - z_{n+1}.\end{aligned}$$

Si on ajoute et retranche  $\tilde{z}_{n+1}$  à cette dernière quantité, on obtient

$$\begin{aligned}\tau_{n+1}(h) &= y(t_{n+1}) - \tilde{z}_{n+1} + \tilde{z}_{n+1} - z_{n+1}, \\ &= y(t_{n+1}) - y(t_n) - \tilde{\phi}(t_n, y(t_n), h) + \tilde{z}_{n+1} - z_{n+1}, \\ &= \tilde{\tau}_{n+1}(h) + \tilde{z}_{n+1} - z_{n+1}.\end{aligned}$$

Puisque  $\tilde{\tau}_{n+1}(h) = \mathcal{O}(h^{p+2})$  et  $\tau_{n+1}(h) = \mathcal{O}(h^{p+1})$  on peut donc négliger  $\tilde{\tau}_{n+1}(h)$  devant  $\tau_{n+1}(h)$ , et estimer  $\tau_{n+1}(h)$  par :

$$\hat{\tau}_{n+1}(h) = \tilde{z}_{n+1} - z_{n+1}.$$

On utilise cet estimateur de la façon suivante : on part d'un pas initial, typiquement  $h = (T - t_0)/100$ , et à chaque itération  $n$ , on calcule  $\tilde{z}_{n+1} - z_{n+1}$  et donc  $\hat{\tau}_{n+1}(h)$ . On a ensuite les cas suivants à envisager :

- Si  $\frac{|\hat{\tau}_{n+1}(h)|}{h} \in [\varepsilon/10, \varepsilon]$ , alors on accepte  $z_{n+1}$ , on conserve le même pas pour l'itération suivante.
- Si  $\frac{|\hat{\tau}_{n+1}(h)|}{h} \in [0, \varepsilon/10[$ , on accepte  $z_{n+1}$  et on augmente le pas pour l'itération suivante (par exemple  $h \leftarrow 2h$ ).
- Si  $\frac{|\hat{\tau}_{n+1}(h)|}{h} > \varepsilon$ , on refuse  $z_{n+1}$ , on diminue le pas (par exemple  $h \leftarrow h/2$ ) et on recalcule  $z_{n+1}$ ,  $\tilde{z}_{n+1}$  puis  $\hat{\tau}_{n+1}(h)$ .

**Document**  
**B.1.4**  
Adaptation  
automatique du  
pas

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

En général, on impose une valeur maximale au pas (souvent il s'agit de sa valeur initiale), ainsi qu'une valeur minimale. Lorsque le pas minimum est atteint, cela signifie que soit la valeur minimum est trop grande par rapport à la tolérance  $\varepsilon$  exigée, soit la solution de l'équation différentielle présente une singularité à l'instant  $t_n$  considéré.

La méthode la plus utilisée est basée sur deux schémas de Runge-Kutta, respectivement d'ordre 4 et 5 (c'est la méthode utilisée dans la fonction `ode45` de Matlab).

[retour au cours](#)

**Document**  
**B.1.4**  
Adaptation  
automatique du  
pas

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

# Annexe C

## Exercices

|     |                                         |    |
|-----|-----------------------------------------|----|
| C.1 | Exercices du chapitre 7 . . . . .       | 65 |
| C.2 | Exercices de TD du chapitre 7 . . . . . | 73 |

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## C.1 Exercices du chapitre 7

|       |                                                                    |    |
|-------|--------------------------------------------------------------------|----|
| C.1.1 | Solution analytique d'une équation différentielle linéaire . . . . | 66 |
| C.1.2 | Cauchy-Lipschitz : contre-exemple à l'unicité . . . . .            | 67 |
| C.1.3 | Mise sous forme normale . . . . .                                  | 68 |
| C.1.4 | Schéma d'Euler implicite : premier itéré . . . . .                 | 69 |
| C.1.5 | Schéma d'Euler-Cauchy : premier itéré . . . . .                    | 70 |
| C.1.6 | Schémas d'Euler : convergence . . . . .                            | 71 |
| C.1.7 | Schéma d'Euler-Cauchy : ordre . . . . .                            | 72 |

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice C.1.1** Solution analytique d'une équation différentielle linéaire

Résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L}\theta(t), \\ \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0. \end{cases}$$

[retour au cours](#)

Solution

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.2 Cauchy-Lipschitz : contre-exemple à l'unicité

Montrer que pour tout réel  $a \geq 0$ ,

$$y_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{pour } 0 \leq t \leq a, \\ \frac{(t-a)^2}{4}, & \text{pour } a \leq t, \end{cases}$$

est solution de

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{y(t)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Bien vérifier que c'est une fonction dérivable en tout point  $t \geq 0$ . (On s'en assurera en étudiant soigneusement le point de raccord  $t = a$ .)

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.3 Mise sous forme normale

Montrer que la résolution de

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L} \sin \theta(t), \\ \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0, \end{cases}$$

où  $\theta_0$ ,  $g$  et  $L$  sont des réels donnés, se ramène à la résolution d'un système d'équations différentielles du premier ordre.

[retour au cours](#)

Solution

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.4 Schéma d'Euler implicite : premier itéré

Expliquer comment on obtiendrait le premier itéré de la méthode d'Euler implicite pour résoudre

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L} \sin \theta(t), \\ \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0, \end{cases}$$

où  $\theta_0$ ,  $g$  et  $L$  sont des réels donnés

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.5 Schéma d'Euler-Cauchy : premier itéré

Expliquer comment on obtiendrait le premier itéré de la méthode d'Euler-Cauchy pour résoudre

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L} \sin \theta(t), \\ \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0, \end{cases}$$

où  $\theta_0$ ,  $g$  et  $L$  sont des réels donnés.

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.6 Schémas d'Euler : convergence

Montrer que les schémas explicite et implicite d'Euler appliqués à

$$\begin{cases} y' = -\lambda y(t), \text{ avec } \lambda > 0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

avec  $nh = t$  (pas constant) conduisent chacun à une suite  $(z_n)$  telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0, nh=t} z_n = y_0 e^{-\lambda(t)}.$$

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### **Exercice C.1.7** Schéma d'Euler-Cauchy : ordre

Calculer l'ordre du schéma d'Euler-Cauchy.

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## C.2 Exercices de TD du chapitre 7

|       |                                                                  |    |
|-------|------------------------------------------------------------------|----|
| C.2.1 | <a href="#">TD7-Exercice1 : schéma (méthodes des trapèzes)</a>   | 74 |
| C.2.2 | <a href="#">TD7-Exercice2 : mise sous forme normale</a>          | 75 |
| C.2.3 | <a href="#">TD7-Exercice3 : étude de trois méthodes</a>          | 76 |
| C.2.4 | <a href="#">TD7-Exercice4 : schéma à un pas et à deux étapes</a> | 77 |
| C.2.5 | <a href="#">TD7-Exercice5 : méthodes multi-pas</a>               | 79 |
| C.2.6 | <a href="#">TD7-Exercice6 : autres méthodes multi-pas</a>        | 81 |
| C.2.7 | <a href="#">TD7-Exercice7 : avancement d'un schéma implicite</a> | 82 |

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.2.1 TD7-Exercice1 : schéma (méthodes des trapèzes)

Étant donné la fonction  $f$  et les valeurs initiales  $t_0$  et  $y_0$ , on se propose de résoudre numériquement le problème :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (\text{C.2.1})$$

On choisit un pas  $h$ , on note  $t_{n+1} = t_n + h$ , on a donc de façon équivalente :

$$\begin{cases} y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt, \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (\text{C.2.2})$$

1. Construire une méthode de résolution numérique du problème (C.2.2), en utilisant la formule d'intégration numérique des trapèzes.
2. On applique ce schéma, avec un pas  $h$  constant, au problème modèle :

$$\begin{cases} y'(t) = -\lambda y(t), \text{ avec } \lambda > 0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

- (a) Quelle est la solution exacte  $y(t)$  ?
- (b) On pose  $h = \frac{t}{n}$ , si  $z_n$  est la valeur approchée obtenue par la méthode numérique précédente, donner l'expression de  $z_n$  à l'aide de  $y_0, \lambda, h, n$ .
- (c) Calculer la limite de  $z_n$  quand  $n$  tend vers l'infini quand le pas  $h$  est fixé. Comparer avec la limite  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ .
- (d) Calculer la limite de  $z_n$  quand  $n$  tend vers l'infini quand  $t$  est fixé. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = y(t)$ .

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

**Exercice C.2.2** TD7-Exercice2 : mise sous forme normale

1. Soit l'équation différentielle d'ordre  $m$  suivante

$$y^{(m)} = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}), \quad t \in [a, b],$$

avec pour conditions initiales

$$y(a) = \alpha_0, \quad y'(a) = \alpha_1, \dots, \quad y^{(m-1)}(a) = \alpha_{m-1}.$$

Mettre cette équation différentielle sous la forme d'une équation différentielle d'ordre 1 dans  $\mathbb{R}^m$ .

2. Application : mettre l'équation différentielle

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = a_3 \cos t, \quad t \in [0, 1]$$

avec pour conditions initiales :

$$y(0) = \alpha_0, \quad y'(0) = 0,$$

sous la forme d'une équation différentielle d'ordre 1 dans  $\mathbb{R}^2$ . Écrire cette équation différentielle à l'aide de produits matriciels. Préciser les conditions initiales.

3. Utiliser la méthode d'Euler explicite pour en déduire une approximation de  $y(h)$ .
4. On choisit  $a_1 = 5$ ,  $a_2 = 4$ ,  $a_3 = 34$ ,  $\alpha_0 = 5$ .
- (a) Montrer que la solution exacte de cette équation est  $y(t) = e^{-t} + e^{-4t} + 3 \cos t + 5 \sin t$ , (vous réviserez comment on détermine cette solution exacte!).
- (b) Que vaut  $y(h)$ ,  $y'(h)$ ? Comparer avec les valeurs approchées obtenues.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.2.3 TD7-Exercice3 : étude de trois méthodes

On veut résoudre numériquement

$$y''(t) + \alpha y(t) + \beta t y^2(t) + \gamma y'(t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad y(0) = \lambda, \quad y'(0) = \mu.$$

1. Donner les schémas d'Euler explicite, du point milieu puis de Runge Kutta d'ordre 4 pour résoudre ce problème.
2. Écrire un algorithme permettant de résoudre cette équation par le schéma du point milieu.
3. On choisit  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = \gamma = 0$ .
  - (a) Quelle est la solution exacte?
  - (b) Déterminer une approximation de  $y(h)$  à l'aide de chacun des trois schémas précédents, comparer avec la solution exacte.

Question 1 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#)

Question 2 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)

Question 3a [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 3b [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.2.4 TD7-Exercice4 : schéma à un pas et à deux étapes

Étant donné la fonction  $f$ , les valeurs initiales  $t_0$  et  $y_0$ , la valeur maximale  $T > 0$ , on se propose de résoudre numériquement le problème :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad t \in [t_0, t_0 + T] \quad (\text{C.2.3})$$

Soit  $N > 0$ , on définit un pas  $h = \frac{T}{N}$ , on note  $t_{n+1} = t_n + h$  pour  $n = 0, \dots, N-1$ . On définit le schéma numérique destiné à résoudre (C.2.3) :

$$\begin{cases} z_{n+1} &= z_n + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 \\ k_1 &= hf(t_n, z_n) \\ k_2 &= hf(t_n + \lambda h, z_n + \lambda k_1) \end{cases}, \quad \text{où } \alpha_1, \alpha_2, \lambda \text{ sont des coefficients réels.}$$

1. (a) Étant donné  $t_n, \lambda$ ,  $y(t)$  solution de l'équation différentielle (C.2.3), on note  $g(h) = f(t_n + \lambda h, y(t_n) + \lambda h y'(t_n))$ . Montrer que

$$g(0) = y'(t_n), \quad g'(0) = \lambda y''(t_n), \quad g''(0) = \lambda^2 y'''(t_n) - \lambda^2 y''(t_n) \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n)).$$

- (b) Déterminer les coefficients  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  pour que l'ordre du schéma numérique soit le plus élevé possible. Réponse :  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_2 \lambda = \frac{1}{2}$ .
- (c) Expliciter le schéma numérique dans le cas  $\lambda = \frac{1}{2}, \alpha_1 = 1$ . Quelles méthodes classiques obtient-on? Donner une interprétation graphique : dans le plan, à

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

partir du point de coordonnées  $(t_n, z_n)$ , tracer les différentes droites qui permettent d'obtenir le point de coordonnées  $(t_{n+1}, z_{n+1})$ , on suppose bien sûr que l'on sait calculer  $f(t, y)$  pour tout couple  $(t, y)$ .

2. On suppose que la fonction  $f$  vérifie une condition de Lipschitz en  $y$  :

$$\exists C, \forall t \in [t_0, t_0 + T], \forall z, y \in \mathbb{R} |f(t, y) - f(t, z)| \leq C|y - z|.$$

Montrer qu'alors le schéma numérique est stable.

3. En déduire que le schéma numérique est convergent.

Question 1a [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#) [Aide 5](#) [Aide 6](#)

Question 1b [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)

Question 1c [Aide 1](#)

## Exercice C.2.4

TD7-Exercice5 :

schéma à un  
pas et à deux  
étapes

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.2.5 TD7-Exercice5 : méthodes multi-pas

Étant donné  $t_0, T, N$ , on note  $h = \frac{T}{N}$ ,  $t_n = t_0 + nh$ .

1. Étant donné les valeurs  $f_n$  et  $f_{n-1}$ , on note  $p_n$  le polynôme d'interpolation vérifiant

$p_n(t_n) = f_n$ ,  $p_n(t_{n-1}) = f_{n-1}$ , donner l'expression de  $\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} p_n(t) dt$  en fonction de  $h$ ,  $f_n, f_{n-1}$ .

2. On veut résoudre

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

à l'aide d'un schéma multi-pas. Pour cela on utilise la relation  $y(t_{n+1}) = y(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt$ . Si on suppose connues des approximations  $z_{n-1}$  et  $z_n$  de  $y(t_{n-1})$  et  $y(t_n)$ , on calcule  $f_n = f(t_n, z_n)$ ,  $f_{n-1} = f(t_{n-1}, z_{n-1})$  et on approche  $y(t_{n+1})$  par  $z_{n+1}$  défini par :

$$z_{n+1} = z_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} p_n(t) dt$$

où  $p_n$  est le polynôme défini à la question précédente.

Donner l'expression de  $z_{n+1}$  à l'aide de  $h$ ,  $z_{n-1}$  et  $z_n$ .

Ce schéma est appelé schéma de saute-mouton (ou *leap frog* en anglais).

3. Quel est l'ordre du schéma numérique ?
4. La mise en oeuvre de ce schéma multi-pas suppose que l'on connaisse les valeurs  $y_0$  et  $y_1$ , comment proposez-vous de déterminer ces valeurs ?

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

5. On note maintenant  $p_n$  le polynôme d'interpolation vérifiant

$$p_n(t_n) = f_n, p_n(t_{n-1}) = f_{n-1}, p_n(t_{n-2}) = f_{n-2}$$

(a) Donner l'expression de  $\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} p_n(t) dt$  en fonction de  $h, f_n, f_{n-1}, f_{n-2}$ .

(b) On approche  $y(t_{n+1})$  par  $z_{n+1}$  défini par :

$$z_{n+1} = z_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} p_n(t) dt$$

où  $p_n$  est le polynôme défini à la question précédente.

Donner l'expression de  $z_{n+1}$  à l'aide de  $h, z_{n-2}, z_{n-1}$  et  $z_n$ .

Réponse :  $z_{n+1} = z_{n-1} + h \left( \frac{7}{3} f(t_n, z_n) - \frac{2}{3} f(t_{n-1}, z_{n-1}) + \frac{1}{3} f(t_{n-2}, z_{n-2}) \right)$ .

(c) Quel est l'ordre de ce schéma numérique ?

Question 1 [Aide 1](#)

Question 2 [Aide 1](#)

Question 3 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#) [Aide 5](#)

Question 4 [Aide 1](#)

Question 5c [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#) [Aide 5](#)

## Exercice C.2.5

TD7-Exercice6 :  
méthodes  
multi-pas

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.2.6 TD7-Exercice6 : autres méthodes multi-pas

Étant donné  $t_0, T, N$ , on note  $h = \frac{T}{N}$ ,  $t_n = t_0 + nh$ .

1. Étant donné les valeurs  $f_n$  et  $f_{n-1}$ , on note  $p_n$  le polynôme d'interpolation vérifiant

$p_n(t_n) = f_n$ ,  $p_n(t_{n-1}) = f_{n-1}$ , donner l'expression de  $\int_{t_n}^{t_{n+1}} p_n(t) dt$  en fonction de  $h$ ,  $f_n, f_{n-1}$ .

2. On veut résoudre

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

à l'aide d'un schéma multi-pas, on utilise la relation  $y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt$ , pour cela si on suppose connues des approximations  $z_{n-1}$  et  $z_n$  de  $y(t_{n-1})$  et  $y(t_n)$ , on calcule  $f_n = f(t_n, z_n)$ ,  $f_{n-1} = f(t_{n-1}, z_{n-1})$  et on approche  $y(t_{n+1})$  par  $z_{n+1}$  défini par :

$$z_{n+1} = z_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} p_n(t) dt$$

où  $p_n$  est le polynôme défini à la question précédente.

Donner l'expression de  $z_{n+1}$  à l'aide de  $h$ ,  $z_{n-1}$  et  $z_n$ . Quelle formule bien connue obtient-on ?

Réponse :  $z_{n+1} = z_n + h \left( \frac{3}{2} f(t_n, z_n) - \frac{1}{2} f(t_{n-1}, z_{n-1}) \right)$ .

3. Quel est l'ordre de ce schéma numérique ?

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

### Exercice C.2.7 TD7-Exercice7 : avancement d'un schéma implicite

Étant donné  $t_0, T, N$ , on note  $h = \frac{T}{N}$ ,  $t_n = t_0 + nh$ . On veut résoudre

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}, \quad t \in [t_0, t_0 + T]$$

à l'aide d'un schéma à un pas implicite où  $f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  et  $y_0 \in \mathbb{R}^p$  sont donnés ( $p \geq 1$ ).

1. Écrire le schéma d'Euler implicite reliant  $z_{n+1}$  à  $z_n$ . Écrire la fonction  $\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ , telle que  $z_{n+1}$  est une solution du système non linéaire  $\varphi(x) = 0$ .
2. On suppose  $p = 1$ . Écrire le schéma de Newton pour calculer  $z_{n+1}$ . Calculer la dérivée de  $\varphi$  dans ce cas.
3. On suppose  $p \geq 2$ . Écrire dans ce cas le schéma de Newton pour calculer  $z_{n+1}$ . Calculer la matrice jacobienne de  $\varphi$  dans ce cas.
4. Quelle valeur prendre pour initialiser l'algorithme de Newton à chaque pas de temps ?

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

# Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

## A

|                                 |               |
|---------------------------------|---------------|
| Adams-Bashforth.....            | <b>33</b>     |
| Adams-Bashforth - Exemples..... | <b>33, 36</b> |
| Adams-Moulton .....             | <b>37</b>     |
| Adams-Moulton - Exemples .....  | <b>37, 40</b> |

## E

|                         |           |
|-------------------------|-----------|
| Equation différentielle |           |
| Exemple .....           | <b>4</b>  |
| Introduction .....      | <b>7</b>  |
| Références.....         | <b>41</b> |

|                                |           |
|--------------------------------|-----------|
| Euler-étude de la méthode..... | <b>19</b> |
| Euler-exemples .....           | <b>15</b> |

## O

|                                  |               |
|----------------------------------|---------------|
| Ordre des schémas à un pas ..... | <b>22, 24</b> |
|----------------------------------|---------------|

## P

|                                   |               |
|-----------------------------------|---------------|
| Principe des méthodes numériques. | <b>11, 15</b> |
|-----------------------------------|---------------|

## R

|                  |           |
|------------------|-----------|
| Runge-Kutta..... | <b>27</b> |
|------------------|-----------|

## S

|                                      |           |
|--------------------------------------|-----------|
| Schémas prédicteur-correcteurs ..... | <b>17</b> |
|--------------------------------------|-----------|

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Solution de l'exercice C.1.1

Revoyez la résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants, par exemple dans le polycopié de MT91 chapitre9.

Les constantes  $g$  et  $L$  sont positives, la solution de

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L}\theta(t), \\ \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0. \end{cases}$$

est donc

$$\begin{cases} \theta(t) = a \cos \sqrt{\frac{g}{L}} t + b \sin \sqrt{\frac{g}{L}} t \\ a = \theta_0, b = 0. \end{cases}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.1.2

Pour  $t \in ]0, a[$ ,  $y_a$  est dérivable et sa dérivée est nulle.

Pour  $t \in ]a, +\infty[$ ,  $y_a$  est dérivable et  $y'_a(t) = \frac{t-a}{2}$ .

Donc en  $t = a$   $y_a$  admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche, ces deux dérivées sont égales donc  $y_a$  est dérivable en  $a$  et  $y'_a(a) = 0$ .

On vérifie que

pour  $t \in ]0, a[$ ,  $\sqrt{y_a(t)} = 0 = y'_a(t)$ ,

pour  $t \in ]a, +\infty[$ ,  $\sqrt{y_a(t)} = \frac{|t-a|}{2} = \frac{t-a}{2} = y'_a(t)$ .

On a de plus  $y_a(0) = 0$ ,  $y_a$  est donc solution du problème de Cauchy.

Le problème de Cauchy admet donc une infinité de solutions.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Solution de l'exercice C.1.3

On pose

$$Y_1(t) = \theta(t), Y_2(t) = \dot{\theta}(t), Y(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix},$$

on a alors

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L} \sin \theta(t), \\ \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y'(t) = \begin{pmatrix} Y_2(t) \\ -\frac{g}{L} \sin Y_1(t) \end{pmatrix} = F(t, Y(t)), \\ Y(0) = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

On note que la fonction  $F : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$(\tau, U) \mapsto F(\tau, U) = \begin{bmatrix} U_2 \\ -\frac{g}{L} \sin U_1 \end{bmatrix},$$

ne dépend pas explicitement de sa première variable (notée ici  $\tau$ ).

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.1.4

Revoir l'exercice [C.1.3](#) qui permet d'obtenir un système d'équations différentielles du premier ordre équivalent.

On choisit un pas  $h$ , on a  $t_1 = h$ . Le vecteur  $Z^{(1)} \in \mathbb{R}^2$  qui est une approximation de  $\begin{pmatrix} \theta(t_1) \\ \dot{\theta}(t_1) \end{pmatrix}$  est obtenu en résolvant :  $Z^{(1)} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} + hF(t_1, Z^{(1)})$ . Si l'on note  $u$  et  $v$  les deux composantes du vecteur  $Z^{(1)}$ , on doit donc résoudre le système de deux équations :

$$Z^{(1)} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} + hF(t_1, Z^{(1)}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} v \\ -\frac{g}{L} \sin u \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u - hv - \theta_0 = 0 \\ v + h\frac{g}{L} \sin u = 0 \end{cases}$$

C'est un système de deux équations non linéaires, que l'on peut résoudre par exemple par la méthode de Newton vue dans le Chapitre 4. Cette méthode nécessite une valeur initiale pour le vecteur  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ , on peut choisir par exemple  $Z^{(0)}$ .

Pour calculer  $Z^{(2)}$  (puis pour les autres itérés), on devra résoudre à nouveau un système de 2 équations

$$Z^{(2)} = Z^{(1)} + hF(t_2, Z^{(2)}).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.1.5

Revoir l'exercice [C.1.3](#) qui permet d'obtenir un système d'équations différentielles du premier ordre équivalent.

On choisit un pas  $h$ , on a  $t_0 = 0$  et  $t_1 = h$ . On pose  $Z^{(0)} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} = Y(0)$ . Le vecteur  $Z^{(1)}$  qui est une approximation de  $Y(t_1) = \begin{pmatrix} \theta(t_1) \\ \dot{\theta}(t_1) \end{pmatrix}$ , est obtenu explicitement en écrivant

$$Z^{(1)} = Z^{(0)} + \frac{h}{2} (F(t_0, Z^{(0)}) + F(t_1, Z^{(0)} + hF(Z^{(0)}))).$$

On calcule

$$Z^{(0)} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix}, F(t_0, Z^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{g}{L} \sin \theta_0 \end{pmatrix}, Z^{(0)} + hF(t_0, Z^{(0)}) = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ -h\frac{g}{L} \sin \theta_0 \end{pmatrix},$$

$$F(t_1, Z^{(0)} + hF(Z^{(0)})) = \begin{pmatrix} -h\frac{g}{L} \sin \theta_0 \\ -\frac{g}{L} \sin \theta_0 \end{pmatrix}$$

ce qui permet d'obtenir  $Z^{(1)}$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.1.6

Pour le schéma d'Euler simple on a

$$z_0 = y_0, \quad z_n = z_{n-1} - \lambda h z_{n-1} = (1 - \lambda h) z_{n-1} = \dots = (1 - \lambda h)^n z_0$$

On a  $nh = t$ , donc  $n = \frac{t}{h}$ , quand  $h$  tend vers 0,  $(1 - \lambda h)^n$  est indéterminée de la forme  $1^\infty$ , levons l'indétermination.

$$(1 - \lambda h)^n = (1 - \lambda h)^{\frac{t}{h}} = \exp\left(\frac{t}{h} \ln(1 - \lambda h)\right) = \exp\left(\frac{t}{h}(-\lambda h + h\epsilon(h))\right).$$

On a donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 - \lambda h)^n = \lim_{h \rightarrow 0} \exp\left(\frac{t}{h}(-\lambda h + h\epsilon(h))\right) = \exp(-\lambda t).$$

Et donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} z_n = y_0 \exp(-\lambda t).$$

Pour le schéma d'Euler implicite on a

$$z_0 = y_0, \quad z_n = z_{n-1} - \lambda h z_n \Leftrightarrow z_n = \frac{1}{1 + \lambda h} z_{n-1} = \dots = \left(\frac{1}{1 + \lambda h}\right)^n z_0$$

Là encore, quand  $h$  tend vers 0,  $\left(\frac{1}{1 + \lambda h}\right)^n$  est indéterminée de la forme  $1^\infty$ , levons l'indétermination.

$$\left(\frac{1}{1 + \lambda h}\right)^n = \left(\frac{1}{1 + \lambda h}\right)^{\frac{t}{h}} = \exp\left(\frac{t}{h} \ln\left(\frac{1}{1 + \lambda h}\right)\right) = \exp\left(-\frac{t}{h} \ln(1 + \lambda h)\right) = \exp\left(-\frac{t}{h}(\lambda h + h\epsilon(h))\right).$$

On a donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 + \lambda h}\right)^n = \lim_{h \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{t}{h}(\lambda h + h\epsilon(h))\right) = \exp(-\lambda t).$$

Et donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} z_n = y_0 \exp(-\lambda t).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.1.7

Pour obtenir l'ordre du schéma d'Euler-Cauchy, il faut calculer le développement limité de

$$\tau_{n+1}(h) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \frac{h}{2} (f(t_n, y(t_n)) + f(t_n + h, y(t_n) + hf(t_n, y(t_n))))),$$

où  $y$  est solution de

$$y'(t) = f(t, y(t)).$$

On va supposer que les fonctions  $f$ ,  $y$  sont suffisamment dérivables. En utilisant les résultats sur les dérivées des fonctions composées, on obtient

$$y''(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))$$

On peut écrire  $\tau_{n+1}(h)$  comme la somme de trois termes :

$$A = y(t_{n+1}) - y(t_n), \quad B = -\frac{h}{2} f(t_n, y(t_n)), \quad C = -\frac{h}{2} f(t_n + h, y(t_n) + hf(t_n, y(t_n))).$$

$$A = y(t_{n+1}) - y(t_n) = hy'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \frac{h^3}{6} y'''(c), \quad c \in ]t_n, t_{n+1}[.$$

$$B = -\frac{h}{2} f(t_n, y(t_n)) = -\frac{h}{2} y'(t_n).$$

$$C = -\frac{h}{2} f(t_n + h, y(t_n) + hf(t_n, y(t_n))) = -\frac{h}{2} f(t_n + h, y(t_n) + hy'(t_n)) = -\frac{h}{2} g(h),$$

où l'on a noté

$$g(h) = f(t_n + h, y(t_n) + hy'(t_n))$$

en utilisant les dérivées des fonctions composées, on obtient :

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial t}(t_n + h, y(t_n) + hy'(t_n)) + y'(t_n) \frac{\partial f}{\partial y}(t_n + h, y(t_n) + hy'(t_n))$$

on a donc

$$g(0) = f(t_n, y(t_n)) = y'(t_n), \quad g'(0) = \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y(t_n)) + y'(t_n) \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n)) = y''(t_n)$$

En utilisant le développement de Taylor, on obtient

$$g(h) = g(0) + hg'(0) + \frac{h^2}{2} g''(d) = y'(t_n) + hy''(t_n) + \frac{h^2}{2} g''(d), \quad d \in ]0, h[,$$

d'où

$$C = -\frac{h}{2} y'(t_n) - \frac{h^2}{2} y''(t_n) - \frac{h^3}{4} g''(d).$$

En regroupant

$$\tau_{n+1}(h) = A + B + C = h^3 \left( \frac{y'''(c)}{6} - \frac{g''(d)}{4} \right),$$

si l'on suppose que les fonctions  $y'''$  et  $g''$  sont majorées respectivement par  $M_1$  et  $M_2$ , on obtient

$$|\tau_{n+1}(h)| \leq h^3 \left( \frac{M_1}{6} + \frac{M_2}{4} \right), \quad \text{donc} \quad \left| \frac{\tau_{n+1}(h)}{h} \right| \leq Mh^2, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

le schéma d'Euler-Cauchy est donc d'ordre 2.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice C.2.3

Il faut commencer par se ramener à un système d'équation du premier ordre.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1, Exercice C.2.3

On pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) = y(t) \\ X_2(t) = y'(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Que vaut  $X(0)$  ?

Donner l'expression de  $X'(t)$  en fonction de  $t$ ,  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$ .

En déduire une fonction  $F(t, z)$  telle que

$$X'(t) = F(t, X(t)).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 3, Question 1, Exercice C.2.3

$$X(0) = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$X'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) = -(\alpha y(t) + \beta t y^2(t) + \gamma y'(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2(t) \\ -\alpha X_1(t) - \beta t X_1^2(t) - \gamma X_2(t) \end{pmatrix}.$$

Si l'on définit

$$F(t, U) = \begin{pmatrix} U_2 \\ -\alpha U_1 - \beta t U_1^2 - \gamma U_2 \end{pmatrix},$$

on a alors

$$X'(t) = F(t, X(t)).$$

Il suffit alors de recopier les schémas classiques.

[Retour à l'exercice ▲](#)

— **Schéma d'Euler explicite** : (ordre 1)

$$Z^{(n+1)} = Z^{(n)} + hF(t_n, Z^{(n)})$$

— **Schéma du Point Milieu** : (ordre 2)

$$Z^{(n+1)} = Z^{(n)} + hK_2$$

avec

$$K_1 = F(t_n, Z^{(n)})$$

$$K_2 = F\left(t_n + \frac{h}{2}, Z^{(n)} + \frac{h}{2}K_1\right)$$

— **Schéma du Runge Kutta d'ordre 4** :

$$Z^{(n+1)} = Z^{(n)} + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

avec

$$K_1 = F(t_n, Z^{(n)})$$

$$K_2 = F\left(t_n + \frac{h}{2}, Z^{(n)} + \frac{h}{2}K_1\right)$$

$$K_3 = F\left(t_n + \frac{h}{2}, Z^{(n)} + \frac{h}{2}K_2\right)$$

$$K_4 = F(t_n, Z^{(n)} + hK_3)$$

## Aide 1, Question 2, Exercice C.2.3

Quelles sont les données?

Que calcule-t-on?

Comment range-t-on les différentes valeurs calculées?

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2, Exercice C.2.3

Données :  $T \in \mathbb{R}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda, \mu$ , et la fonction  $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que  $(t, U) \rightarrow F(t, U)$

On calcule et on range les vecteurs  $y_0, Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots, Z^{(N)}$  dans une matrice  $Z$  à 2 lignes et  $N + 1$  colonnes.

La première ligne contient les premières composantes des  $Z^{(n)}$ , c'est-à-dire les approximations des  $y(t_n)$ .

La seconde ligne contient les deuxièmes composantes des  $Z^{(n)}$ , c'est-à-dire les approximations des  $y'(t_n)$ ,

$0 \leq n \leq N$

$N$  est le nombre d'intervalles (et  $N + 1$  est le nombre de points de discrétisation, les  $t_n$ ,  $n = 0, \dots, N$ ).

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 2, Exercice C.2.3

$$h = T/N$$

initialiser la matrice  $Z$  à 0

$$zz = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$tt = 0$$

stocker  $zz$  dans la première colonne de  $Z$

pour  $i=1$  à  $N$

$$K1 = F(tt, zz)$$

$$K2 = F(tt + h/2, zz + h/2 * K1)$$

$$zz = zz + h * K2$$

stocker  $zz$  dans la  $(i + 1)$ ème colonne de  $Z$

$$tt = tt + h$$

fin pour

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 3a, Exercice C.2.3

La solution générale est donc :

$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

On utilise les conditions initiales pour déterminer  $C_1$  et  $C_2$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 3a, Exercice C.2.3

la solution exacte est

$$y(t) = \sin t$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 1, Question 3b, Exercice C.2.3

On rappelle les développements limités classiques :

$$\begin{cases} y(h) = \sin h = h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + h^5 \epsilon_1(h) \\ y'(h) = \cos h = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} + h^5 \epsilon_2(h) \end{cases}$$

On va maintenant calculer  $z^{(1)}$  approximation de  $\begin{pmatrix} y(h) \\ y'(h) \end{pmatrix}$  à l'aide des trois schémas décrits.

[Retour à l'exercice ▲](#)

**Schéma d'Euler explicite : (ordre 1)**

$$z^{(1)} = z^{(0)} + hF(t_0, z^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + hF\left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ceci correspond à la partie polynomiale du DL de  $\begin{pmatrix} \sinh h \\ \cosh h \end{pmatrix}$  à l'ordre **1**.

Calculez maintenant  $z^{(1)}$  à l'aide du schéma point milieu.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 3, Question 3b, Exercice C.2.3

**Point Milieu : (ordre 2)**

$$K_1 = F(t_0, z^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$K_2 = F\left(t_0 + \frac{h}{2}, z^{(0)} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = F\left(\frac{h}{2}, \begin{pmatrix} 0 + \frac{h}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{h}{2} \end{pmatrix}$$

$$z^{(1)} = z^{(0)} + hK_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{h}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ 1 - \frac{h^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Ceci correspond à la partie polynomiale du DL de  $\begin{pmatrix} \sin h \\ \cos h \end{pmatrix}$  à l'ordre **2**.

Calculez maintenant  $z^{(1)}$  à l'aide du schéma RK4.

[Retour à l'exercice ▲](#)

**Runge Kutta à l'ordre 4**

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{h}{2} \end{pmatrix}$$

$$K_3 = F\left(t_0 + \frac{h}{2}, z^{(0)} + \frac{h}{2}K_2\right) = F\left(\frac{h}{2}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{h}{2} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{h^2}{4} \\ -\frac{h}{2} \end{pmatrix}$$

$$K_4 = F\left(t_0, z^{(0)} + hK_3\right) = F\left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 1 - \frac{h^2}{4} \\ -\frac{h}{2} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{h^2}{2} \\ -h + \frac{h^3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} z^{(1)} &= z^{(0)} + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 1 + 2 + 2 - \frac{h^2}{2} + 1 - \frac{h^2}{2} \\ 0 - h - h - h + \frac{h^3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + \frac{h}{6}(6 - h^2) \\ 1 + \frac{h}{6}(-3h + \frac{h^3}{4}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h & -\frac{h^3}{3!} \\ 1 & -\frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ceci correspond à la partie polynomiale du DL de  $\begin{pmatrix} \sin h \\ \cos h \end{pmatrix}$  à l'ordre 4

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1a, Exercice C.2.4

On obtient

$$g'(0) = f'(t_n, y(t_n)) = y'(t_n)$$

Si l'on note  $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial y}$ , les dérivées partielles de  $f$ , d'après les résultats sur les dérivées des fonctions composées on sait que si  $g(h) = f(a(h), b(h))$ , alors  $g'(h) = a'(h) \frac{\partial f}{\partial t}(a(h), b(h)) + b'(h) \frac{\partial f}{\partial y}(a(h), b(h))$ . Appliquez ce résultat ici.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 1a, Exercice C.2.4

On a ici

$$a(h) = t_n + \lambda h, \text{ donc } a'(h) = \lambda, b(h) = y(t_n) + \lambda h y'(t_n) \text{ donc } b'(h) = \lambda y'(t_n)$$

On obtient donc

$$g'(h) = \lambda \frac{\partial f}{\partial t}(a(h), b(h)) + \lambda y'(t_n) \frac{\partial f}{\partial y}(a(h), b(h))$$

on a donc

$$g'(0) = \lambda \frac{\partial f}{\partial t}(a(0), b(0)) + \lambda y'(t_n) \frac{\partial f}{\partial y}(a(0), b(0)) = \lambda \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y(t_n)) + \lambda y'(t_n) \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))$$

Calculez  $y''(t)$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 1a, Exercice C.2.4

On a  $y'(t) = f(t, y(t))$ , on utilise à nouveau les dérivées des fonctions composées et on obtient :

$$y''(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))$$

on a donc

$$y''(t_n) = \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y(t_n)) + y'(t_n) \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))$$

Donc

$$g'(0) = \lambda y''(t_n)$$

De façon similaire calculez  $g''(h)$  puis  $g''(0)$ , calculez  $y'''(t_n)$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 4, Question 1a, Exercice C.2.4

On a

$$g'(h) = \lambda \frac{\partial f}{\partial t}(a(h), b(h)) + \lambda y'(t_n) \frac{\partial f}{\partial y}(a(h), b(h))$$
$$a(h) = t_n + \lambda h, \quad b(h) = y(t_n) + \lambda h y'(t_n)$$

Il suffit donc d'appliquer (encore!) la règle de dérivation des fonctions composées appliquée ici aux fonctions  $\frac{\partial f}{\partial t}(a(h), b(h))$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(a(h), b(h))$ , on obtient :

$$g''(h) = \lambda a'(h) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(a(h), b(h)) + \lambda b'(h) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(a(h), b(h)) + \lambda y'(t_n) a'(h) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(a(h), b(h)) + \lambda y'(t_n) b'(h) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a(h), b(h))$$

Terminez le calcul de  $g''(h)$  puis calculez  $g''(0)$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 5, Question 1a, Exercice C.2.4

$$g''(h) = \lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(a(h), b(h)) + 2\lambda^2 y'(t_n) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(a(h), b(h)) + \lambda^2 (y'(t_n))^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a(h), b(h))$$

$$g''(0) = \lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_n, y(t_n)) + 2\lambda^2 y'(t_n) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_n, y(t_n)) + \lambda^2 (y'(t_n))^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_n, y(t_n))$$

Calculez maintenant  $y'''(t)$  en utilisant l'expression de  $y''(t)$  déjà calculée.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 6, Question 1a, Exercice C.2.4

$$y''(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))$$

si l'on note

$$\phi(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)), \psi(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))$$

en utilisant (encore et toujours!) la dérivée des fonctions composées, on obtient :

$$\phi'(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, y(t)) + y'(t) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, y(t)), \quad \psi'(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, y(t)) + y'(t) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y(t))$$

En utilisant les résultats sur les produits et les sommes, on a

$$\begin{aligned} y'''(t) &= \phi'(t) + y'(t)\psi'(t) + y''(t)\psi(t) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, y(t)) + y'(t) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, y(t)) + y'(t) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, y(t)) + (y'(t))^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y(t)) + y''(t) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) \end{aligned}$$

En comparant avec le résultat obtenu pour  $g''(0)$ , à savoir :

$$g''(0) = \lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_n, y(t_n)) + 2\lambda^2 y'(t_n) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_n, y(t_n)) + \lambda^2 (y'(t_n))^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_n, y(t_n))$$

on obtient le résultat recherché :

$$g''(0) = \lambda^2 y'''(t_n) - \lambda^2 y''(t_n) \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n)).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 1b, Exercice C.2.4

On va calculer un développement de Taylor de

$$\tau_{n+1}(h) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \alpha_1 h y'(t_n) - \alpha_2 h g(h).$$

À quel ordre ?

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1b, Exercice C.2.4

Il faudrait progressivement augmenter l'ordre jusqu'à trouver le premier terme non nul.

Cependant puisque dans la question précédente on demande de calculer  $g(0), g'(0), g''(0)$ , cela va nous permettre d'écrire le développement de  $hg(h)$  jusqu'à l'ordre 3, faisons de même pour les autres termes.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 1b, Exercice C.2.4

On a

$$g(h) = g(0) + hg'(0) + \frac{h^2}{2}g''(0) + h^3(\dots) = y'(t_n) + h\lambda y''(t_n) + \frac{h^2}{2}K + h^3(\dots).$$

où

$$K = \left( \lambda^2 y'''(t_n) - \lambda^2 y''(t_n) \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n)) \right).$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) = y(t_n + h) &= y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{1}{2}h^2 y''(t_n) + \frac{1}{6}h^3 y'''(t_n) + h^4(\dots) \\ -y(t_n) &= -y(t_n) \\ -\alpha_1 h y'(t_n) &= -\alpha_1 h y'(t_n) \\ -\alpha_2 h g(h) &= -\alpha_2 h y'(t_n) - \alpha_2 \lambda h^2 y''(t_n) - \alpha_2 \frac{h^3}{2} K + h^4(\dots) \\ \tau_{n+1}(h) &= h y'(t_n)(1 - \alpha_1 - \alpha_2) + h^2 y''(t_n)(\frac{1}{2} - \alpha_2 \lambda) + h^3 (\frac{1}{6} y'''(t_n) - \frac{\alpha_2}{2} K) + h^4(\dots) \end{aligned}$$

Il est donc possible d'annuler les termes en  $h$  et les termes en  $h^2$  à condition que

$$1 - \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad \frac{1}{2} - \alpha_2 \lambda = 0.$$

Le coefficient du terme en  $h^3$  vaut

$$\frac{1}{6}y'''(t_n) - \frac{\alpha_2}{2}K = \frac{1}{6}y'''(t_n) - \frac{\alpha_2}{2} \left( \lambda^2 y'''(t_n) - \lambda^2 y''(t_n) \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n)) \right),$$

il n'est pas possible d'annuler ce terme.

Le schéma numérique sera d'ordre 2

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 1c, Exercice C.2.4

Pour  $\lambda = \frac{1}{2}$  on obtient la méthode du point milieu, pour  $\lambda = 1$  on obtient la méthode d'Euler-Cauchy.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 1, Exercice C.2.5

On trouve

$$p_n(t) = \frac{t - t_{n-1}}{h} f_n - \frac{t - t_n}{h} f_{n-1}$$

$$\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} p_n(t) dt = 2hf_n.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice C.2.5

Schéma de saute-mouton (utilisé souvent pour l'équation des ondes) :

$$z_{n+1} = z_{n-1} + 2hf(t_n, z_n).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 3, Exercice C.2.5

On calcule

$$\begin{aligned}\tau_{n+1}(h) &= y(t_{n+1}) - y(t_{n-1}) - 2hf(t_n, y(t_n)) \\ &= y(t_{n+1}) - y(t_{n-1}) - 2hy'(t_n).\end{aligned}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 3, Exercice C.2.5

On effectue un développement de Taylor de  $y(t_{n+1})$ ,  $-y(t_{n-1})$  et de  $-2hy'(t_n)$  on s'arrêtera lorsque l'on trouvera un terme non nul. Commençons par l'ordre 1

$$\begin{aligned}y(t_{n+1}) = y(t_n + h) &= y(t_n) + hy'(t_n) + h^2(\dots) \\-y(t_{n-1}) = -y(t_n - h) &= -y(t_n) + hy'(t_n) + h^2(\dots) \\-2hy'(t_n) &= -2hy'(t_n) \\ \tau_{n+1}(h) &= +h^2(\dots)\end{aligned}$$

Les termes constants et les termes en  $h$  s'éliminent, on doit continuer le développement.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 3, Exercice C.2.5

On effectue un développement de Taylor à l'ordre 2

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) = y(t_n + h) &= y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{1}{2}h^2 y''(t_n) + h^3(\dots) \\ -y(t_{n-1}) = -y(t_n - h) &= -y(t_n) + hy'(t_n) - \frac{1}{2}h^2 y''(t_n) + h^3(\dots) \\ -2hy'(t_n) &= -2hy'(t_n) \\ \tau_{n+1}(h) &= +h^3(\dots) \end{aligned}$$

Les termes en  $h^2$  s'éliminent, on doit continuer le développement.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 4, Question 3, Exercice C.2.5

On effectue un développement de Taylor à l'ordre 3

$$\begin{aligned}
 y(t_{n+1}) = y(t_n + h) &= y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{1}{2}h^2 y''(t_n) + \frac{1}{6}h^3 y'''(t_n) + h^4(\dots) \\
 -y(t_{n-1}) = -y(t_n - h) &= -y(t_n) + hy'(t_n) - \frac{1}{2}h^2 y''(t_n) + \frac{1}{6}h^3 y'''(t_n) + h^4(\dots) \\
 -2hy'(t_n) &= -2hy'(t_n) \\
 \tau_{n+1}(h) &= +h^3(\dots) + h^4(\dots)
 \end{aligned}$$

Les termes en  $h^3$  ne s'éliminent pas, on peut écrire le développement de Taylor-Lagrange :

$$\begin{aligned}
 y(t_{n+1}) = y(t_n + h) &= y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{1}{2}h^2 y''(t_n) + \frac{1}{6}h^3 y'''(c) \\
 -y(t_{n-1}) = -y(t_n - h) &= -y(t_n) + hy'(t_n) - \frac{1}{2}h^2 y''(t_n) + \frac{1}{6}h^3 y'''(d) \\
 -2hy'(t_n) &= -2hy'(t_n) \\
 \tau_{n+1}(h) &= \frac{1}{3}h^3 \frac{y'''(c) + y'''(d)}{2}
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{1}{3}h^3 y'''(e)$$

où  $c \in ]t_n, t_{n+1}[$ ,  $d \in ]t_{n-1}, t_n[$ ,  $e \in ]t_{n-1}, t_{n+1}[$  On peut donc en déduire l'ordre du schéma.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 5, Question 3, Exercice C.2.5

Si on note  $M$  un majorant de  $|y'''(t)|$  sur  $[t_0, t_0 + T]$ , on a donc

$$\max_{1 \leq n \leq N-1} \frac{|\tau_{n+1}(h)|}{h} \leq \frac{M}{3} h^2$$

Le schéma est donc d'ordre 2.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 4, Exercice C.2.5

$y_0$  est connu,  $y_1$  peut être calculé à l'aide d'un schéma à un pas.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 5c, Exercice C.2.5

On calcule

$$\begin{aligned}\tau_{n+1}(h) &= y(t_{n+1}) - y(t_{n-1}) - h \left( \frac{7}{3} f(t_n, y(t_n)) - \frac{2}{3} f(t_{n-1}, y(t_{n-1})) + \frac{1}{3} f(t_{n-2}, y(t_{n-2})) \right) \\ &= y(t_{n+1}) - y(t_{n-1}) - h \left( \frac{7}{3} y'(t_n) - \frac{2}{3} y'(t_{n-1}) + \frac{1}{3} y'(t_{n-2}) \right)\end{aligned}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 5c, Exercice C.2.5

On effectue un développement de Taylor de  $y(t_{n+1})$ ,  $-y(t_{n-1})$ ,  $-\frac{7}{3}hy'(t_n)$ ,  $\frac{2}{3}hy'(t_{n-1})$ ,  $-\frac{1}{3}hy'(t_{n-2})$ , on s'arrêtera lorsque l'on trouvera un terme non nul. Commençons par l'ordre 1

$$\begin{aligned}y(t_{n+1}) &= y(t_n + h) &= y(t_n) &+ hy'(t_n) &+ h^2(\dots) \\-y(t_{n-1}) &= -y(t_n - h) &= -y(t_n) &+ hy'(t_n) &+ h^2(\dots) \\-\frac{7}{3}hy'(t_n) & &= &-\frac{7}{3}hy'(t_n) & \\ \frac{2}{3}hy'(t_{n-1}) &= \frac{2}{3}hy'(t_n - h) &= &+\frac{2}{3}hy'(t_n) &+ h^2(\dots) \\-\frac{1}{3}hy'(t_{n-2}) &= -\frac{1}{3}hy'(t_n - 2h) &= &-\frac{1}{3}hy'(t_n) &+ h^2(\dots) \\ \tau_{n+1}(h) & &= & &+ h^2(\dots)\end{aligned}$$

Les termes constants et les termes en  $h$  s'éliminent, on doit continuer le développement.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 5c, Exercice C.2.5

On effectue un développement de Taylor à l'ordre 2

$$\begin{aligned}y(t_{n+1}) &= y(t_n + h) &= y(t_n) &+ hy'(t_n) &+ \frac{1}{2}h^2 y''(t_n) &+ h^3(\dots) \\-y(t_{n-1}) &= -y(t_n - h) &= -y(t_n) &+ hy'(t_n) &- \frac{1}{2}h^2 y''(t_n) &+ h^3(\dots) \\-\frac{7}{3}hy'(t_n) & &= &-\frac{7}{3}hy'(t_n) & & \\ \frac{2}{3}hy'(t_{n-1}) &= \frac{2}{3}hy'(t_n - h) &= &\frac{2}{3}hy'(t_n) &- \frac{2}{3}h^2 y''(t_n) &+ h^3(\dots) \\-\frac{1}{3}hy'(t_{n-2}) &= -\frac{1}{3}hy'(t_n - 2h) &= &-\frac{1}{3}hy'(t_n) &+ \frac{2}{3}h^2 y''(t_n) &+ h^3(\dots) \\ \tau_{n+1}(h) & &= & & &+ h^3(\dots)\end{aligned}$$

Les termes en  $h^2$  s'éliminent, on doit continuer le développement.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 4, Question 5c, Exercice C.2.5

On effectue un développement de Taylor à l'ordre 3

$$\begin{array}{rcll}
 y(t_{n+1}) = y(t_n + h) & = & y(t_n) & + hy'(t_n) & + \frac{1}{2}h^2 y''(t_n) & + \frac{1}{6}h^3 y'''(t_n) & + h^4(\dots) \\
 -y(t_{n-1}) = -y(t_n - h) & = & -y(t_n) & + hy'(t_n) & - \frac{1}{2}h^2 y''(t_n) & + \frac{1}{6}h^3 y'''(t_n) & + h^4(\dots) \\
 -\frac{7}{3}hy'(t_n) & = & & -\frac{7}{3}hy'(t_n) & & & \\
 \frac{2}{3}hy'(t_{n-1}) = \frac{2}{3}hy'(t_n - h) & = & \frac{2}{3}hy'(t_n) & - \frac{2}{3}h^2 y''(t_n) & + \frac{1}{3}h^3 y'''(t_n) & + h^4(\dots) \\
 -\frac{1}{3}hy'(t_{n-2}) = -\frac{1}{3}hy'(t_n - 2h) & = & -\frac{1}{3}hy'(t_n) & + \frac{2}{3}h^2 y''(t_n) & - \frac{2}{3}h^3 y'''(t_n) & + h^4(\dots) \\
 \tau_{n+1}(h) & = & & & & & + h^4(\dots)
 \end{array}$$

Les termes en  $h^3$  s'éliminent, on doit continuer le développement.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 5, Question 5c, Exercice C.2.5

On effectue un développement de Taylor à l'ordre 4

$$\begin{aligned}
 y(t_{n+1}) = y(t_n + h) &= y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{1}{2}h^2 y''(t_n) + \frac{1}{6}h^3 y'''(t_n) + \frac{1}{24}h^4 y^{(4)}(t_n) + h^5(\dots) \\
 -y(t_{n-1}) = -y(t_n - h) &= -y(t_n) + hy'(t_n) - \frac{1}{2}h^2 y''(t_n) + \frac{1}{6}h^3 y'''(t_n) - \frac{1}{24}h^4 y^{(4)}(t_n) + h^5(\dots) \\
 -\frac{7}{3}hy'(t_n) &= -\frac{7}{3}hy'(t_n) \\
 \frac{2}{3}hy'(t_{n-1}) = \frac{2}{3}hy'(t_n - h) &= \frac{2}{3}hy'(t_n) - \frac{2}{3}h^2 y''(t_n) + \frac{2}{6}h^3 y'''(t_n) - \frac{1}{9}h^4 y^{(4)}(t_n) + h^5(\dots) \\
 -\frac{1}{3}hy'(t_{n-2}) = -\frac{1}{3}hy'(t_n - 2h) &= -\frac{1}{3}hy'(t_n) + \frac{2}{3}h^2 y''(t_n) - \frac{2}{3}h^3 y'''(t_n) + \frac{4}{9}h^4 y^{(4)}(t_n) + h^5(\dots) \\
 \tau_{n+1}(h) &= +h^5(\dots)
 \end{aligned}$$

Les termes en  $h^4$  ne s'éliminent pas, on peut écrire le développement de Taylor-Lagrange :

$$\begin{aligned}
 y(t_{n+1}) = y(t_n + h) &= y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{1}{2}h^2 y''(t_n) + \frac{1}{6}h^3 y'''(t_n) + \frac{1}{24}h^4 y^{(4)}(c_1) \\
 -y(t_{n-1}) = -y(t_n - h) &= -y(t_n) + hy'(t_n) - \frac{1}{2}h^2 y''(t_n) + \frac{1}{6}h^3 y'''(t_n) - \frac{1}{24}h^4 y^{(4)}(c_2) \\
 -\frac{7}{3}hy'(t_n) &= -\frac{7}{3}hy'(t_n) \\
 \frac{2}{3}hy'(t_{n-1}) = \frac{2}{3}hy'(t_n - h) &= \frac{2}{3}hy'(t_n) - \frac{2}{3}h^2 y''(t_n) + \frac{2}{6}h^3 y'''(t_n) - \frac{1}{9}h^4 y^{(4)}(c_3) \\
 -\frac{1}{3}hy'(t_{n-2}) = -\frac{1}{3}hy'(t_n - 2h) &= -\frac{1}{3}hy'(t_n) + \frac{2}{3}h^2 y''(t_n) - \frac{2}{3}h^3 y'''(t_n) + \frac{4}{9}h^4 y^{(4)}(c_4) \\
 \tau_{n+1}(h) &= +h^4(\dots)
 \end{aligned}$$

On a donc

$$|\tau_{n+1}(h)| \leq h^4 M \left( \frac{1}{12} + \frac{5}{9} \right)$$

où  $M$  un majorant de  $|y^{(4)}(t)|$  sur  $[t_0, t_0 + T]$ , on a donc

$$\max_{1 \leq n \leq N-1} \frac{|\tau_{n+1}(h)|}{h} \leq \frac{23M}{36} h^3$$

Le schéma est donc d'ordre 3.

[Retour à l'exercice ▲](#)