Exercices du chapitre 7 avec corrigé succinct

Exercice VII.1

Résoudre l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L}\theta(t), \\ \theta(0) = \theta_0, \ \dot{\theta}(0) = 0. \end{cases}$$

Solution : Revoyez la résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants, par exemple dans le polycopié de MT91 chapitre9.
les constantes g et L sont positives, la solution de

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L}\theta(t), \\ \theta(0) = \theta_0, \ \dot{\theta}(0) = 0. \end{cases}$$

est donc

$$\begin{cases} \theta(t) = a\cos\sqrt{\frac{g}{L}}t + b\sin\sqrt{\frac{g}{L}}t \\ a = \theta_0, \ b = 0. \end{cases}$$

Exercice VII.2

Montrer que pour tout réel $a \geq 0$,

$$y_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{pour } 0 \leq t \leq a, \\ \frac{(t-a)^2}{4}, & \text{pour } a \leq t, \end{cases}$$

est solution de

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{y(t)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Bien vérifier que c'est une fonction dérivable en tout point $t \geq 0$. (On s'en assurera en étudiant soigneusement le point de raccord $t = a$.)

Solution : Pour $t \in]0, a[$, y_a est dérivable et sa dérivée est nulle.
Pour $t \in]a, +\infty[$, y_a est dérivable et $y_a'(t) = \frac{t-a}{2}$.
Donc en $t = a$ y_a admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche, ces deux dérivées sont égales donc y_a est dérivable en a et $y_a'(a) = 0$.
On vérifie que
pour $t \in]0, a]$, $\sqrt{y_a(t)} = 0 = y_a'(t)$,
pour $t \in]a, +\infty[$, $\sqrt{y_a(t)} = \frac{|t-a|}{2} = \frac{t-a}{2} = y_a'(t)$.
On a de plus $y_a(0) = 0$, y_a est donc solution du problème de Cauchy.
Le problème de Cauchy admet donc une infinité de solutions

Exercice VII.3

Montrer que la résolution de

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -\dfrac{g}{L}\sin\theta(t), \\ \theta(0) = \theta_0,\ \dot{\theta}(0) = 0, \end{cases}$$

où θ_0, g et L sont des réels donnés, se ramène à la résolution d'un sytème d'équations différentielles du premier ordre

Solution : On pose

$$Y_1(t) = \theta(t),\ Y_2(t) = \dot{\theta}(t),\ Y(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix},$$

on a alors

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -\dfrac{g}{L}\sin\theta(t), \\ \theta(0) = \theta_0,\ \dot{\theta}(0) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y'(t) = \begin{pmatrix} Y_2(t) \\ -\frac{g}{L}\sin Y_1(t) \end{pmatrix} = F(t, Y(t)), \\ Y(0) = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

On note que la fonction $F : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$(\tau, U) \mapsto F(\tau, U) = \begin{bmatrix} U_2 \\ -\frac{g}{L}\sin U_1 \end{bmatrix},$$

ne dépend pas explicitement de sa première variable (notée ici τ).

Exercice VII.4

Expliquer comment on obtiendrait le premier itéré de la méthode d'Euler implicite pour résoudre

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -\dfrac{g}{L}\sin\theta(t), \\ \theta(0) = \theta_0,\ \dot{\theta}(0) = 0, \end{cases}$$

où θ_0, g et L sont des réels donnés

Solution : Revoir l'exercice VII.3 qui permet d'obtenir un système d'équations différentielles du premier ordre équivalent.

On choisit un pas h, on a $t_1 = h$. Le vecteur $Z^{(1)} \in \mathbb{R}^2$ qui est une approximation de $\begin{pmatrix} \theta(t_1) \\ \dot{\theta}(t_1) \end{pmatrix}$ est obtenu en résolvant : $Z^{(1)} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} + hF(t_1, Z^{(1)})$. Si l'on note u et v les deux composantes du vecteur $Z^{(1)}$, on doit donc résoudre le système de deux équations :

$$Z^{(1)} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} + hF(t_1, Z^{(1)}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} v \\ -\frac{g}{L}\sin u \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u - hv - \theta_0 = 0 \\ v + h\frac{g}{L}\sin u = 0 \end{cases}$$

C'est un système de deux équations non linéaires, que l'on peut résoudre par exemple par la méthode de Newton vue dans le Chapitre 4. Cette méthode nécessite une valeur initiale pour le vecteur $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, on peut choisir par exemple $Z^{(0)}$.

Pour calculer $Z^{(2)}$ (puis pour les autres itérés), on devra résoudre à nouveau un système de 2 équations

$$Z^{(2)} = Z^{(1)} + hF(t_2, Z^{(2)}).$$

Exercice VII.5

Expliquer comment on obtiendrait le premier itéré de la méthode d'Euler-Cauchy pour résoudre

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -\dfrac{g}{L}\sin\theta(t), \\ \theta(0) = \theta_0,\ \dot{\theta}(0) = 0, \end{cases}$$

où θ_0, g et L sont des réels donnés.

Solution : Revoir l'exercice VII.3 qui permet d'obtenir un système d'équations différentielles du premier ordre équivalent.

On choisit un pas h, on a $t_0 = 0$ et $t_1 = h$. On pose $Z^{(0)} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} = Y(0)$. Le vecteur $Z^{(1)}$ qui est une approximation de $Y(t_1) = \begin{pmatrix} \theta(t_1) \\ \dot{\theta}(t_1) \end{pmatrix}$, est obtenu explicitement en écrivant

$$Z^{(1)} = Z^{(0)} + \frac{h}{2}\left(F\left(t_0, Z^{(0)}\right) + F\left(t_1, Z^{(0)} + hF(Z^{(0)})\right)\right).$$

On calcule

$$Z^{(0)} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix},\ F(t_0, Z^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{g}{L}\sin\theta_0 \end{pmatrix},\ Z^{(0)} + hF(t_0, Z^{(0)}) = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ -h\frac{g}{L}\sin\theta_0 \end{pmatrix},$$

$$F\left(t_1, Z^{(0)} + hF(Z^{(0)})\right) = \begin{pmatrix} -h\frac{g}{L}\sin\theta_0 \\ -\frac{g}{L}\sin\theta_0 \end{pmatrix}$$

ce qui permet d'obtenir $Z^{(1)}$.

Exercice VII.6

Montrer que les schémas explicite et implicite d'Euler appliqués à

$$\begin{cases} y' = -\lambda\, y(t),\ \text{avec } \lambda > 0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

avec $nh = t$ (pas constant) conduisent chacun à une suite (z_n) telle que

$$\lim_{h\to 0,\, nh = t} z_n = y_0 e^{-\lambda(t)}.$$

Solution : Pour le schéma d'Euler simple on a

$$z_0 = y_0, \quad z_n = z_{n-1} - \lambda h z_{n-1} = (1-\lambda h) z_{n-1} = \ldots = (1-\lambda h)^n z_0$$

On a $nh = t$, donc $n = \frac{t}{h}$, quand h tend vers 0, $(1-\lambda h)^n$ est indéterminée de la forme 1^∞, levons l'indétermination.

$$(1-\lambda h)^n = (1-\lambda h)^{\frac{t}{h}} = \exp\left(\frac{t}{h}\ln(1-\lambda h\right) = \exp\left(\frac{t}{h}(-\lambda h + h\epsilon(h))\right).$$

On a donc

$$\lim_{h\to 0}(1-\lambda h)^n = \lim_{h\to 0}\exp\left(\frac{t}{h}(-\lambda h + h\epsilon(h))\right) = \exp(-\lambda t).$$

Et donc

$$\lim_{h\to 0} z_n = y_0 \exp(-\lambda t).$$

Pour le schéma d'Euler implicite on a

$$z_0 = y_0, \quad z_n = z_{n-1} - \lambda h z_n \Leftrightarrow z_n = \frac{1}{1+\lambda h} z_{n-1} = \ldots = \left(\frac{1}{1+\lambda h}\right)^n z_0$$

Là encore, quand h tend vers 0, $\left(\frac{1}{1+\lambda h}\right)^n$ est indéterminée de la forme 1^∞, levons l'indétermination.

$$\left(\frac{1}{1+\lambda h}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\lambda h}\right)^{\frac{t}{h}} = \exp\left(\frac{t}{h}\ln\left(\frac{1}{1+\lambda h}\right)\right) = \exp\left(-\frac{t}{h}\ln(1+\lambda h)\right) = \exp\left(-\frac{t}{h}(\lambda h + h\epsilon(h))\right).$$

On a donc

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{1+\lambda h}\right)^n = \lim_{h\to 0}\exp\left(-\frac{t}{h}(\lambda h + h\epsilon(h))\right) = \exp(-\lambda t)\,.$$

Et donc

$$\lim_{h\to 0} z_n = y_0\exp(-\lambda t).$$

Exercice VII.7

Calculer l'ordre du schéma d'Euler-Cauchy.

Solution : Pour obtenir l'ordre du schéma d'Euler-Cauchy, il faut calculer le développement limité de

$$\tau_{n+1}(h) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \frac{h}{2}\left(f(t_n, y(t_n)) + f(t_n+h, y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)))\right),$$

où y est solution de

$$y'(t) = f(t, y(t)).$$

On va supposer que les fonctions f, y sont suffisamment dérivables En utilisant les résultats sur les dérivées des fonctions composées, on obtient

$$y''(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))$$

On peut écrire $\tau_{n+1}(h)$ comme la somme de trois termes :

$$A = y(t_{n+1}) - y(t_n),\ \ B = -\frac{h}{2}f(t_n, y(t_n)),\ \ C = -\frac{h}{2}f(t_n+h, y(t_n) + hf(t_n, y(t_n))).$$

$$A = y(t_{n+1}) - y(t_n) = hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + \frac{h^3}{6}y'''(c), c \in]t_n, t_{n+1}[.$$

$$B = -\frac{h}{2}f(t_n, y(t_n)) = -\frac{h}{2}y'(t_n).$$

$$C = -\frac{h}{2}f(t_n+h, y(t_n) + hf(t_n, y(t_n))) = -\frac{h}{2}f(t_n+h, y(t_n) + hy'(t_n)) = -\frac{h}{2}g(h),$$

où l'on a noté

$$g(h) = f(t_n+h, y(t_n) + hy'(t_n))$$

en utilisant les dérivées des fonctions composées, on obtient :

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial t}(t_n+h, y(t_n) + hy'(t_n)) + y'(t_n)\frac{\partial f}{\partial y}(t_n+h, y(t_n) + hy'(t_n))$$

on a donc

$$g(0) = f(t_n, y(t_n)) = y'(t_n),\ \ g'(0) = \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y(t_n)) + y'(t_n)\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n)) = y''(t_n)$$

En utilisant le développement de Taylor, on obtient

$$g(h) = g(0) + hg'(0) + \frac{h^2}{2}g''(d) = y'(t_n) + hy''(t_n) + \frac{h^2}{2}g''(d), d \in]0, h[,$$

d'où

$$C = -\frac{h}{2}y'(t_n) - \frac{h^2}{2}y''(t_n) - \frac{h^3}{4}g''(d).$$

En regroupant

$$\tau_{n+1}(h) = A + B + C = h^3\left(\frac{y'''(c)}{6} - \frac{g''(d)}{4}\right),$$

si l'on suppose que les fonctions y''' et g'' sont majorées respectivement par M_1 et M_2, on obtient

$$|\tau_{n+1}(h)| \leq h^3\left(\frac{M_1}{6} + \frac{M_2}{4}\right), \text{ donc } \left|\frac{\tau_{n+1}(h)}{h}\right| \leq Mh^2,\ 0 \leq n \leq N-1$$

le schéma d'Euler-Cauchy est donc d'ordre 2.