Analyse numérique élémentaire

Chapitre 8 : Calcul numérique des valeurs propres et des vecteurs propres

Équipe de Mathématiques Appliquées

UTC

Septembre 2020

Chapitre 8

Calcul numérique des valeurs propres et des vecteurs propres

8.1 Rappels sur les valeurs propres

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.1.1 Rappels des définitions

Cours :
Chapitre 0.6 : Valeurs propres

On rappelle que, étant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, le problème de calcul des valeurs propres consiste à trouver un scalaire λ tel qu'il existe un vecteur y *non nul* vérifiant

$$\begin{aligned} Ay &= \lambda y, \\ y &\neq 0. \end{aligned}$$

On rappelle qu'une matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$: il existe $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ inversible et D diagonale telles que $D = P^{-1}AP$. Les valeurs propres sont les termes diagonaux de D et les vecteurs propres sont les colonnes de P.

De façon équivalente, A est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de vecteurs propres pour A.

8.1.2 Calcul “à la main” des valeurs propres

Exercices :
Exercice A.1.1

Le problème de la détermination des valeurs propres de A est équivalent à trouver les racines du polynôme caractéristique

$$P_A(s) = \det(sI_n - A).$$

Dans les cours précédents, pour calculer les valeurs propres et vecteurs propres analytiquement, la méthodologie était la suivante :

1. déterminer le polynôme caractéristique, ce qui nécessite le calcul du déterminant d'une matrice de taille n avec un paramètre ;
2. calculer les racines d'un polynôme de degré n ;
3. pour chaque racine λ, résoudre un système linéaire du type $(A - \lambda I_n)y = 0$ (les solutions vivent dans un espace vectoriel de dimension ≥ 1).

Cette méthodologie n'est pas utilisée en pratique, car elle devient rapidement très coûteuse dès que la taille de A grandit. L'objet de ce chapitre est de présenter quelques méthodes qui sont utilisées pour le calcul numérique d'une ou plusieurs valeurs propres de A.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.1.3 Lien avec le calcul de racines de polynôme

Exercices :
Exercice A.2.2

En pratique, on évite donc de calculer numériquement des racines d'un polynôme afin de déterminer des valeurs propres.

En réalité c'est l'inverse qui se fait parfois. En effet, étant donné un polynôme

$$p(t) = t^n + a_n t^{n-1} + a_{n-1} t^{n-2} + \ldots + a_2 t + a_1,$$

on peut démontrer (voir exercice de TD A.2.2) que ce polynôme est le polynôme caractéristique de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} & -a_n \end{pmatrix}.$$

Les matrices A qui ont la forme précédente s'appellent des matrices "Compagnon".

Pour calculer numériquement des racines d'un polynôme, Il arrive donc qu'on cherche des valeurs propres de la matrice Compagnon associée à ce polynôme.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.1.4 Notations et hypothèses

Dans tout ce chapitre, on notera $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les n valeurs propres (distinctes ou non) de A, et on supposera désormais que

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|,$$

λ_1 s'appelle la valeur propre *dominante* de A.

On supposera que la matrice A est diagonalisable, il existe donc une base de vecteurs propres que l'on notera $\{y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}\}$. Chaque $y^{(i)} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur propre associé à λ_i, $i = 1, \ldots, n$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.2 Méthode de la puissance itérée

8.2.1 Puissance itérée : principe

Cours :
Puissance itérée / Convergence, preuve

Exercices :
Exercice A.1.2

La méthode part de l'observation suivante. On se donne un vecteur $x^{(0)}$ non nul dans $\mathbb{R}^n$. Si on applique A plusieurs fois à ce vecteur, le vecteur résultant s'oriente dans la direction du vecteur propre dominant $y^{(1)}$.

Plus précisément, si on applique $k \geq 1$ fois A au vecteur $x^{(0)}$, on obtient un vecteur $z^{(k)} = A(A(\ldots(Ax^{(0)})\ldots)) = A^k x^{(0)}$. La norme de $z^{(k)}$ tend généralement vers l'infini ou vers 0, mais ce vecteur s'oriente peu à peu dans la direction de $y^{(1)}$ ($z^{(k)}$ devient proportionnel à $y^{(1)}$, parfois à un signe près). De plus, on peut remarquer que $Az^{(k)}$ s'approche de $\lambda_1 z^{(k)}$.

Ceci permet donc calculer de façon approchée la valeur propre dominante et un vecteur propre associé. La convergence a lieu quel que soit le vecteur initial (sous réserve d'hypothèses qui seront vues plus loin).

Tout ceci sera prouvé par la suite, voir le renvoi.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.2.2 Puissance itérée : méthode

L'idée de la méthode est d'appliquer A plusieurs fois à un vecteur donné et normaliser les vecteurs au fur et à mesure pour éviter que les vecteurs ne deviennent trop grands ou trop petits.

La méthode de la puissance itérée est la suivante :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné dans } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \\ x^{(k+1)} = \dfrac{Ax^{(k)}}{\left\| Ax^{(k)} \right\|}, \ k \geq 0, \end{cases} \tag{8.2.1}$$

où $\|.\|$ désigne une norme vectorielle quelconque. Les algorithmes basés sur cette méthode s'arrêtent quand $\left\| Ax^{(k)} \right\|$ s'annule ou devient trop petit.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.2.3 Puissance itérée : théorème

Exercices :
Exercice A.1.3

Hypothèses et notations

— On suppose que
$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|.$$
Ceci implique que λ_1 est une valeur propre réelle, simple et non nulle (le montrer en exercice).

— On suppose que $x^{(0)}$ n'appartient pas au sous-espace engendré par les vecteurs propres $\{y^{(2)}, y^{(3)}, \ldots, y^{(n)}\}$. Ceci implique que $x^{(0)} \neq 0$.

— Soit p un indice tel que $y_p^{(1)} \neq 0$

Théorème 8.2.1. *Sous les hypothèses précédentes, la suite $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ engéndrée par les relations (8.2.1) possède les propriétés suivantes*
$$\forall k \geq 0, \left\| Ax^{(k)} \right\| \neq 0 \quad et \quad \lim_{k\to\infty} \left\| Ax^{(k)} \right\| = |\lambda_1|.$$
On a d'ailleurs plus précisément
$$\lim_{k\to\infty} \frac{[Ax^{(k)}]_p}{x_p^{(k)}} = \lambda_1.$$

De plus la suite $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge vers un vecteur propre associé à* λ_1 *de la façon suivante :*

$$\lim_{k\to\infty} [\mathrm{sgn}(\lambda_1)]^k x^{(k)} = \gamma y^{(1)}, \tag{8.2.2}$$

où γ *est une constante réelle.*

8.2.4 Puissance itérée : preuve de convergence

On va maintenant démontrer le théorème 8.2.1. La preuve est particulièrement importante car elle permet de comprendre le fonctionnement de la méthode.

En développant $x^{(0)}$ sur la base des vecteur propres (rappelons qu'on suppose que A est diagonalisable), on peut écrire

$$x^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i y^{(i)}, \ \xi_1 \neq 0 \quad (\text{donc } x^{(0)} \neq 0).$$

Soit $k \geq 0$. Si on suppose que A admet au moins une valeur propre non nulle, alors $\lambda_1 \neq 0$ et on obtient alors

$$A^k x^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i A^k y^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \lambda_i^k y^{(i)} = \lambda_1^k \left(\xi_1 y^{(1)} + \sum_{i=2}^{n} \xi_i \left[\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right]^k y^{(i)} \right) = \lambda_1^k w^{(k)}, \tag{8.2.3}$$

où l'on a posé

$$w^{(k)} = \xi_1 y^{(1)} + \sum_{i=2}^{n} \xi_i \left[\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right]^k y^{(i)} \quad (w^{(k)} \neq 0 \text{ car } \xi_1 \neq 0).$$

On note que $A^k x^{(0)} \neq 0$, car $\lambda_1 \neq 0$ et $w^{(k)} \neq 0$.

On démontre immédiatement que l'on a :

$$x^{(k)} = \frac{A^k x^{(0)}}{\| A^k x^{(0)} \|}. \tag{8.2.4}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

En effet cette propriété est vraie pour $k=1$ par construction de $x^{(1)}$. Si l'on suppose que la propriété est vraie pour k, on a alors

$$x^{(k+1)} = \frac{Ax^{(k)}}{\left\|Ax^{(k)}\right\|} = \frac{A\dfrac{A^k x^{(0)}}{\left\|A^k x^{(0)}\right\|}}{\left\|A\dfrac{A^k x^{(0)}}{\left\|A^k x^{(0)}\right\|}\right\|} = \frac{A^{k+1}x^{(0)}}{\left\|A^{k+1}x^{(0)}\right\|}.$$

On déduit de (8.2.4) que $\left\|Ax^{(k)}\right\| \neq 0$, $\forall k \geq 0$. En utilisant (8.2.4) et (8.2.3), on obtient

$$x^{(k)} = \frac{\lambda_1^k}{|\lambda_1^k|}\frac{w^{(k)}}{\left\|w^{(k)}\right\|} = \operatorname{sgn}(\lambda_1)^k \frac{w^{(k)}}{\left\|w^{(k)}\right\|}, \tag{8.2.5}$$

or $\lim_{k\to\infty} w^{(k)} = \xi_1 y^{(1)}$, car $|\lambda_i/\lambda_1| < 1$, $\forall i > 1$, d'où

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{sgn}(\lambda_1)^k x^{(k)} = \gamma y^{(1)}, \qquad \text{où } \gamma = \frac{\xi_1}{|\xi_1|\left\|y^{(1)}\right\|},$$

et on rappelle que $y^{(1)} \neq 0$ et $\xi_1 \neq 0$. De même d'après (8.2.4) et (8.2.3), comme $\lambda_1 \neq 0$,

$$Ax^{(k)} = \frac{A^{k+1}x^{(0)}}{\left\|A^k x^{(0)}\right\|} = \frac{\lambda_1^{k+1} w^{(k+1)}}{|\lambda_1^k|\left\|w^k\right\|} = \lambda_1 \operatorname{sgn}(\lambda_1)^k \frac{w^{(k+1)}}{\left\|w^{(k)}\right\|} \tag{8.2.6}$$

d'où

$$\left\|Ax^{(k)}\right\| = |\lambda_1| \frac{\left\|w^{(k+1)}\right\|}{\left\|w^{(k)}\right\|},$$

Puissance itérée : preuve de convergence

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

et donc $\lim_{k\to\infty} \left\| Ax^{(k)} \right\| = |\lambda_1|$.

Comme $\lim_{k\to\infty} w_p^{(k)} = \xi_1 y_p^{(1)}$ (non nul par hypothèse), il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, on ait $w_p^{(k)} \neq 0$, et donc $x_p^{(k)} \neq 0$. En utilisant (8.2.5) et (8.2.6), on a pour $k \geq k_0$

$$\frac{[Ax^{(k)}]_p}{x_p^{(k)}} = \lambda_1 \frac{w_p^{(k+1)}}{w_p^{(k)}}, \quad \text{et} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{[Ax^{(k)}]_p}{x_p^{(k)}} = \lambda_1.$$

8.2.5 Puissance itérée : remarques

La preuve du théorème permet de faire quelques remarques sur le comportement de la méthode des puissances itérées :

— La convergence de la méthode est d'autant plus rapide que le ratio $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$ est petit (voir (8.2.3)).

— Si l'on a par exemple $\lambda_1 = \lambda_2$ et $|\lambda_1| > |\lambda_3| \geq |\lambda_4| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$, c'est-à-dire si la valeur propre dominante est double, la démonstration est encore valide, il suffit d'écrire

$$x^{(0)} = \xi_1 y^{(1)} + \sum_{i=3}^{n} \xi_i y^{(i)},$$

où $\xi_1 y^{(1)}$ est la composante de $x^{(0)}$ sur le sous espace propre associé à λ_1 (qui est ici de dimension 2). Ce serait encore valable si λ_1 était de façon générale multiple. En revanche, si on a $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, alors la démonstration n'est pas valable : c'est ce qui se passe en particulier dans le cas des valeurs propres complexes.

— Dans la formule (8.2.2) apparaît le signe de λ_1, ce qui veut dire que, si λ_1 est négatif, alors les vecteurs $x^{(k)}$ oscillent entre les deux vecteurs $+\gamma y^{(1)}$ et $-\gamma y^{(1)}$. On verra en TD (exercice A.2.1) une variante de la méthode de la puissance itérée qui utilise judicieusement la norme infinie afin d'éviter ces oscillations.

8.3 Méthode de la puissance itérée inverse

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.3.1 Puissance itérée inverse : introduction

La méthode de la puissance itérée permet de calculer numériquement la valeur propre dominante d'une matrice A. La méthode qui suit permet de calculer une *autre* valeur propre de A. Elle est basée sur la méthode de la puissance itérée, en prenant pour matrice, non pas A, mais $(A-qI_n)^{-1}$ pour un certain scalaire q. Son nom vient du fait que l'inverse d'une matrice intervient dans son écriture.

Attention : en pratique, on ne calcule *jamais* l'inverse de la matrice, on factorise et on résout des systèmes linéaires !

8.3.2 Puissance itérée inverse : calculs préliminaires

Les calculs qui suivent permettent de passer d'une matrice A à une matrice B^{-1} qui auront les mêmes vecteurs propres, mais des valeurs propres différentes. En particulier, la valeur propre dominante de B^{-1} sera différente de celle de A.

On rappelle que A est inversible si et seulement si $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, c'est-à-dire que 0 n'est pas valeur propre.

Si λ est valeur propre de A et que A est inversible, alors, de façon équivalente, λ^{-1} est valeur propre de A^{-1} et les vecteurs propres associés sont les mêmes. On a en effet

$$Ay = \lambda y \Longleftrightarrow y = \lambda A^{-1} y \Longleftrightarrow A^{-1} y = \lambda^{-1} y.$$

Par ailleurs définissons, pour un scalaire q donné, la matrice

$$B = A - qI_n.$$

Cette matrice admet comme valeurs propres $\lambda_i - q$, où les λ_i sont les valeurs propres de A. La matrice B^{-1} (si elle est définie, c'est-à-dire si q n'est pas valeur propre de A) admet pour valeurs propres

$$\mu_i = \frac{1}{\lambda_i - q}.$$

En effet si z est vecteur propre de B^{-1} associé à $(\lambda_i - q)^{-1}$, il est vecteur propre de B, donc de A et il est évidemment associé à la valeur propre λ_i. Vérification :

$$\begin{aligned} B^{-1} z = (\lambda_i - q)^{-1} z \quad & \Longleftrightarrow \quad z = (\lambda_i - q)^{-1} B z \Longleftrightarrow B z = (\lambda_i - q) z \Longleftrightarrow (A - qI) z = (\lambda_i - q) z \\ & \Longleftrightarrow \quad Az - qz = (\lambda_i - q) z \Longleftrightarrow Az = \lambda_i z. \end{aligned}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On en déduit que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, si et seulement si B l'est, si et seulement si B^{-1} l'est.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.3.3 Puissance itérée inverse : principe

Soit A matrice diagonalisable dans $\mathbb{R}$, soit q un réel et soit λ_j une valeur propre de A qui vérifie

$$0 < |q-\lambda_j| < |q-\lambda_i|,\ \forall\, i \neq j, \tag{8.3.1}$$

c'est-à-dire que le scalaire q n'est pas valeur propre de A, et λ_j est la valeur propre la plus proche de q et elle est unique. Il résulte de (8.3.1) que la matrice B^{-1}

$$B^{-1} = (A - qI)^{-1}$$

admet

$$\nu_1 = \frac{1}{\lambda_j - q}$$

comme valeur propre dominante. Donc pour q donné on peut s'inspirer de l'algoritme de la puissance itérée appliqué à B^{-1} ce qui permet d'obtenir ν_1, et on retrouve λ_j en posant

$$\lambda_j = \frac{1}{\nu_1} + q.$$

La méthode s'appelle méthode de la puissance itérée inverse.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.3.4 Puissance itérée inverse : méthode

Posons $B = A - qI$. On donne $x^{(0)}$ arbitraire (ou presque !) et on définit la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$\left\{\begin{array}{lrcl} \text{résoudre le système :} & Bu^{(k+1)} & = & x^{(k)} \\ \text{mettre à jour :} & x^{(k+1)} & = & \dfrac{u^{(k+1)}}{\left\| u^{(k+1)} \right\|}, \end{array}\right. \quad k \geq 0. \tag{8.3.2}$$

En appliquant le Théorème 8.2.1 à la matrice B^{-1}, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 8.3.1. *Soit $q \in \mathbb{R}$ donné tel que $q \neq \lambda_i$, $\forall i$, et soit $B = A - qI$. Si le vecteur initial $x^{(0)}$ n'appartient pas au sous-espace engendré par $\{y^{(i)}\}_{i=1,\dots,n,i\neq j}$, alors la suite $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ engendrée par la méthode (8.3.2) possède les propriétés suivantes :*

$$\lim_{k\to\infty} \left\| u^{(k)} \right\| = \left| \frac{1}{\lambda_j - q} \right|,$$

où λ_j satisfaisant (8.3.1) est la valeur propre de A la plus proche de q. On a d'ailleurs plus précisément si $y_p^{(j)} \neq 0$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_p^{(k+1)}}{x_p^{(k)}} = \frac{1}{\lambda_j - q}.$$

De plus la suite $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $y^{(j)}$ le vecteur propre de A associé à λ_j de la façon suivante :

$$\lim_{k\to\infty} \left[\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{\lambda_j - q} \right) \right]^k x^{(k)} = \gamma y^{(j)}, \tag{8.3.3}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

où γ est une constante réelle.

Quelques remarques :

— On peut montrer que la méthode converge d'autant plus vite que $|q-\lambda_j|$ est petit devant $|q-\lambda_i|$, $\forall\, i \neq j$.

— Si on prend $q = 0$ et si A est inversible, la méthode de la puissance itérée inverse permet de calculer la plus petite valeur propre en valeur absolue de A (λ_j tel que $0 < |\lambda_j| < |\lambda_i|\ \forall\, i \neq j$).

— À chaque itération de (8.3.2), un système linéaire doit être résolu (on ne calcule pas l'inverse de la matrice). Voir les chapitres 2 et 4 pour les méthodes de résolution des systèmes linéaires.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.4 Méthodes de déflation

8.4.1 Déflation : principe

La méthode précédentes permettent de déterminer une valeur propre et le vecteur propre associé, par exemple la méthode de la puissance itérée inverse permet de calculer la valeur propre de plus petite valeur absolue si elle est unique. Donc si l'on a déterminé par une méthode quelconque une valeur propre λ_1 (valeur propre dominante par exemple), on peut songer à construire une matrice dans laquelle la valeur propre que l'on vient de déterminer n'est plus dominante et qui, par contre, possède toujours $(\lambda_j), j \neq 1$ comme valeurs propres. La méthode de la puissance (par exemple) permet alors de déterminer une nouvelle valeur propre dominante de la famille $(\lambda_j), j \neq 1$ et ainsi de suite. Cette procédure constitue ce qu'on appelle une méthode de déflation.

8.4.2 Déflation : matrices symétriques

On suppose ici que la matrice A est symétrique.

Supposons que l'on connaisse un vecteur propre y associé à la valeur propre λ avec $\|y\|_2 = 1$. Considérons alors la matrice

$$B = A - \lambda y y^\top.$$

Evidemment on a

$$By = Ay - \lambda y y^\top y = \lambda y - \lambda y = 0.$$

Par ailleurs si z est un autre vecteur propre de A associé à une autre valeur propre μ, on a

$$Bz = Az - \lambda y y^\top z = \mu z$$

car $y^\top z = 0$ en vertu de l'orthogonalité des vecteurs propres des matrices symétriques réelles.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.4.3 Déflation : matrices quelconques

Exercices :
Exercice A.2.3

Dans le cas où la matrice A est quelconque, nous présentons la méthode de *Duncan* et *Collar*.

Soit A une matrice quelconque et supposons qu'on a obtenu un couple propre (λ, y) et supposons pour simplifier que la première composante de y est égale à 1. Notons $\underline{A}_1$ la première ligne de la matrice A, par définition du couple (λ, y) on a

$$\underline{A}_1 y = \lambda y_1 = \lambda. \tag{8.4.1}$$

Définissons alors la matrice B par

$$B = A - y\underline{A}_1.$$

Alors la première ligne de B est nulle, en effet

$$\underline{B}_1 = \underline{A}_1 - y_1 \underline{A}_1 = 0.$$

Par ailleurs, d'après (8.4.1) :

$$By = Ay - y\underline{A}_1 y = \lambda y - \lambda y = 0. \tag{8.4.2}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Si l'on suppose que les autres vecteurs propres de A ont leur première composante non nulle alors on peut les normaliser de façon à ce qu'elle soit égale à 1. Dans ces conditions, si (μ, z) est un autre couple propre de A ($\mu \neq \lambda$), on a $Az = \mu z$ et $z_1 = 1$, donc

$$\underline{A}_1 z = \mu$$

et

$$B(z-y) = Bz = Az - y\underline{A}_1 z = \mu z - \mu y = \mu(z-y)$$

la première égalité étant une conséquence de (8.4.2). On a $z - y \neq 0$, car z et y sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. Les autres valeurs propres de B sont donc identiques à celles de A avec pour vecteurs propres associés $z - y$.

Réciproquement, soit (μ, u) est un couple propre de B ($u \neq 0$). Si on suppose que $\mu \neq 0$ et que $\underline{A}_1 u = \mu - \lambda$ (ceci est toujours possible si $\underline{A}_1 u \neq 0$, quitte à changer u en $\frac{\mu-\lambda}{\underline{A}_1 u} u$) alors :

$$A(u+y) = Bu + y\underline{A}_1 u + Ay = \mu u + (\mu - \lambda) y + \lambda y = \mu(u+y).$$

On note que $u + y \neq 0$. En effet, dans le cas contraire, on aurait à la fois $Bu = \mu u \neq 0$ et $Bu = -By = 0$ d'après (8.4.2), ce qui est impossible. On vient de démontrer que $(u+y)$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre μ.

Conclusion : pour obtenir les couples propres de A autres que (λ, y), on se ramène donc à rechercher les couples propres de B (valeur propre non nulle). Compte tenu de la structure particulière de B (sa première ligne étant nulle) on est ramené à un problème de calcul de valeurs propres dans $\mathbb{R}^{n-1}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices du chapitre 8

Exercice A.1.1 Calcul de valeurs propres par la méthode classique

Soient la matrice A et le vecteur $x^{(0)}$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 16 & 5 & 8 \\ -2 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique.
2. Trouver les racines du polynôme caractéristique.
3. Dire si la matrice est diagonalisable.
4. Déterminer les vecteurs propres.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.2 Puissances d'une matrice

Soient la matrice A et le vecteur $x^{(0)}$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 16 & 5 & 8 \\ -2 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \; x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les questions suivantes peuvent être faites en utilisant `scilab`.

1. Calculer $z^{(k)} = A^{(k)} x^{(0)}$ pour $k = 1, 2$, 5 et 10.
2. Calculer $\tilde{z}^{(k)} = \dfrac{z^{(k)}}{\left\| z^{(k)} \right\|_\infty}$. Que remarque-t-on ?
3. Calculer $r^{(k)} = Az^{(k)} - 5z^{(k)}$ pour $k = 1, 2$, 5, 10 et 11.
4. Calculer $\tilde{r}^{(k)} = \dfrac{r^{(k)}}{\left\| r^{(k)} \right\|_\infty}$. Que remarque-t-on ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.3 Valeur propre dominante isolée

Soit une matrice $A \in \mathscr{M}_{nn}$. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les n valeurs propres de A. Montrer que si ces valeurs propres vérifient $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$, alors λ_1 est une valeur propre réelle, simple et non nulle.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exercices de TD du chapitre 8

Exercice A.2.1 TD8-Exercice1 : puissance itérée

1. Soit $A \in \mathscr{M}_{nn}(\mathbb{R})$, on cherche à déterminer la plus grande (*a priori*) valeur propre de A en module ainsi qu'un vecteur propre associé, pour cela on peut utiliser un algorithme inspiré de la méthode de la puissance itérée associé à la norme $\|\cdot\|_\infty$. On se donne un vecteur x non nul, une tolérance $\mathrm{tol} > 0$ et N un nombre maximal d'itérations, puis on applique l'algorithme :

```
Déterminer p tel que |x_p| = ||x||_∞
x ← x / x_p
pour k = 1 jusqu'à N faire
    y ← Ax
    μ ← y_p
    Déterminer p tel que |y_p| = ||y||_∞
    si |y_p| < tol alors
        Arrêter l'algorithme et écrire 0 est valeur propre et x est vecteur propre
    sinon
        E ← || x − y / y_p ||_∞
        x ← y / y_p
    fin si
    si E < tol alors
        Arrêter l'algorithme et écrire μ est valeur propre et x est vecteur propre
    fin si
fin pour
Écrire : l'algorithme n'a pas convergé
```

Exercice A.2.1
TD8-Exercice1 : puissance itérée

(a) Appliquer l'algorithme précédent à $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ en choisissant $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) Même question en partant de $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(c) Même question en partant de $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On pourra montrer que les x obtenus sont de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ 2^{-k} \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. (a) Calculer exactement toutes les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés.
   (b) Justifier les résultats obtenus précédemment.

3. Étant donné un réel q, on veut maintenant déterminer la valeur propre de A la plus proche de q, c'est-à-dire déterminer λ_i telle que
   $|\lambda_i - q| \leq |\lambda_j - q|, \forall j = 1, \ldots, n$, on pose $\mu = \lambda_i$.
   (a) i. Montrer que $\mu - q$ est la valeur propre de plus petit module de $(A - qI)$.
      ii. Que vaut μ si q est valeur propre de A?
      iii. Si q n'est pas valeur propre de A, montrer que $A - qI$ est alors inversible et que $\nu = (\mu - q)^{-1}$ est la plus grande valeur propre en module de $(A - qI)^{-1}$.

Sommaire
Concepts
Exemples
Exercices
Documents

(b) Montrer que l'algorithme de la puissance itérée pour trouver v puis μ devient : on se donne un vecteur x non nul, une tolérance $\text{tol} > 0$, N un nombre maximal d'itérations, et q réel puis on applique l'algorithme :

```
Déterminer p tel que |x_p| = ‖x‖_∞
x ← x / x_p
pour k = 1 jusqu'à N faire
    Résoudre le système linéaire (A − qI) y = x
    si le système n'a pas de solution unique alors
        Arrêter l'algorithme et écrire q est valeur propre
    sinon
        v ← y_p
        Déterminer p tel que |y_p| = ‖y‖_∞
        E ← ‖x − y / y_p‖_∞
        x ← y / y_p
    fin si
    si E < tol alors
        μ = 1/v + q
        Arrêter l'algorithme et écrire μ est valeur propre et x est vecteur propre.
    fin si
fin pour
Écrire : l'algorithme n'a pas convergé
```

(c) i. On choisit $q = 3$, appliquer cet algorithme à la matrice A précédemment

Sommaire
Concepts
Exemples
Exercices
Documents

définie. On partira de $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ii. Même question en choisissant $q = 0$.

iii. Même question en choisissant $q = -1$, on partira de $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice A.2.2 TD8-Exercice2 : matrice Compagnon

1. Soit un entier $n \geq 1$. On dit que la matrice $A^{(n)}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice Compagnon, si elle s'écrit :

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \dots & \dots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

   Montrer que le polynôme caractéristique de $A^{(n)}$ s'écrit :

$$p_n(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n.$$

2. En déduire une méthode pour calculer la racine de plus grand module du polynôme

$$p(t) = t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} t + \alpha_n.$$

Question 1 Aide 1 Aide 2

Exercice A.2.3 TD8-Exercice3 : déflation

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ une matrice dont on connaît une valeur propre non nulle λ^* et $y^* \neq 0$ un vecteur propre associé. On suppose que $z \neq 0$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $z^T y^* = 1$. On définit la matrice B de la façon suivante :

$$B = A - \lambda^* y^* z^T.$$

1. Montrer que y^* est un vecteur propre de B. Quelle est la valeur propre associée ?
2. Il existe au moins une composante de y^* non nulle, supposons que $y_p^* \neq 0$.

   (a) Montrer que l'on peut choisir $z^T = \dfrac{\underline{A}_p}{\lambda^* y_p^*}$.

   (b) Montrer que l'on a alors
   $$B = A - \frac{1}{y_p^*} y^* \underline{A}_p.$$

   (c) En déduire que la ligne p de B est nulle.

3. (a) Soient μ et x une valeur propre de B et un vecteur propre (non nul) associé. On suppose que $\mu \neq 0, \mu \neq \lambda^*$. On définit
   $$y = (\mu - \lambda^*) x + \frac{\underline{A}_p x}{y_p^*} y^*.$$
   Montrer que $y \neq 0$, montrer que y est vecteur propre de A associé à la valeur propre μ.

(b) Soient λ et y une valeur propre de A et un vecteur propre associé (non nul). On suppose que $\lambda \neq \lambda^*, \lambda \neq 0$. On définit

$$x = y - \frac{y_p}{y_p^*} y^*.$$

Montrer que $x \neq 0$, montrer que x est vecteur propre de B associé à la valeur propre λ.

(c) En déduire que si $\lambda \neq 0, \lambda \neq \lambda^*$

$$\{\lambda \text{ est valeur propre de } A\} \Leftrightarrow \{\lambda \text{ est valeur propre de } B\}.$$

4. On définit C matrice extraite de B en supprimant la ligne p et la colonne p de B. Étant donné $v \in \mathbb{R}^{n-1}$, on construit le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ de la façon suivante

$$x_i = v_i \text{ pour } 1 \leq i \leq p-1, \; x_p = 0, \; x_i = v_{i-1} \text{ pour } p+1 \leq i \leq n.$$

Montrer que si $\mu \neq 0$

$$\{Cv = \mu v\} \Leftrightarrow \{Bx = \mu x\}.$$

5. On définit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice A.2.3
TD8-Exercice3 : déflation

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Sachant que cette matrice a pour valeur propre $\lambda^* = 14$ et pour vecteur propre associé $y^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, construire par la méthode précédente la matrice B et la matrice C, en déduire les autres valeurs propres et vecteurs propres de A.

Exercice A.2.3
TD8-Exercice3 : déflation

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Chercher des racines évidentes.

Retour à l'exercice ▲

Remarquer que 2 est racine évidente.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.1.1

Revoir le cours sur les valeurs propres et remarquer que les valeurs propres sont simples.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 4, Exercice A.1.1

Résoudre 3 systèmes linéaires, dont l'espace de solution est de dimension 1 ici.

Retour à l'exercice ▲

1. Le polynôme caractéristique est

$$P_A(s) = \det(sI_n - A) = s^3 - 4^2 - 11s + 30 = (s-5)(s+3)(s-2)$$

2. Les racines sont $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 2$ (classées par ordre décroissant de leurs valeurs absolues).
3. Les matrices réelles dont les valeurs propres sont réelles et simples sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$. En effet, dans ce cas, pour chaque sous espace propre, la multiplicité de la valeur propre (multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique $(=1)$) est égale au degré du sous espace propre $(=1)$.
4. En résolvant les systèmes $Ay^{(i)} = \lambda_i y^{(i)}$, on trouve par exemple : $y^{(1)} = [1, 1, -2]^T$, $y^{(2)} = [-1, 1, 1]^T$, $y^{(3)} = [1, 0, -2]^T$.

   Note : les solutions forment un espace vectoriel (ici de dimension 1), donc tout vecteur non nul proportionnel à ceux donnés est correct.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.2

1. On trouve

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix},\ z^{(2)} = \begin{pmatrix} 103 \\ 79 \\ -179 \end{pmatrix},\ z^{(3)} = \begin{pmatrix} 371 \\ 581 \\ -823 \end{pmatrix},\ z^{(4)} = \begin{pmatrix} 2647 \\ 2257 \\ -5051 \end{pmatrix},\ z^{(5)} = \begin{pmatrix} 11.579 \\ 13.229 \\ -23.887 \end{pmatrix}.$$

   On trouve pour $k = 10$:

$$z^{(10)} = \begin{pmatrix} 39.233.503 \\ 38.885.353 \\ -78.289.859 \end{pmatrix}.$$

2. On trouve

$$\tilde{z}^{(1)} \approx \begin{pmatrix} -0.0344 \\ 1. \\ -0.241 \end{pmatrix},\ \tilde{z}^{(2)} \approx \begin{pmatrix} 0.575 \\ 0.408 \\ -1. \end{pmatrix},\ \tilde{z}^{(3)} \approx \begin{pmatrix} 0.451 \\ 0.706 \\ -1. \end{pmatrix},\ \tilde{z}^{(4)} \approx \begin{pmatrix} 0.524 \\ 0.447 \\ -1. \end{pmatrix},\ \tilde{z}^{(5)} \approx \begin{pmatrix} 0.485 \\ 0.554 \\ -1. \end{pmatrix},$$

   On trouve pour $k = 10$:

$$\tilde{z}^{(10)} \approx \begin{pmatrix} 0.501 \\ 0.497 \\ -1. \end{pmatrix}.$$

   On remarque que $\tilde{z}^{(k)}$ tend vers un vecteur proportionnel à $y^{(1)} = [1, 1, -2]^T$, quand k tend vers l'infini. Donc, les $z^{(k)}$ s'orientent aussi, peu à peu, dans la direction de $y^{(1)}$, mais comme leurs normes grandissent rapidement, c'est plus difficile à observer.

3. On trouve

$$r^{(1)} = \begin{pmatrix} 108 \\ -72 \\ -144 \end{pmatrix},\ r^{(2)} = \begin{pmatrix} -144 \\ 216 \\ 72 \end{pmatrix},\ r^{(3)} = \begin{pmatrix} 792 \\ -648 \\ -936 \end{pmatrix},\ r^{(4)} = \begin{pmatrix} -1656 \\ 1944 \\ 1368 \end{pmatrix},\ r^{(5)} = \begin{pmatrix} 6408 \\ -5832 \\ -6984 \end{pmatrix}.$$

On trouve pour $k = 10$:

$$r^{(10)} = \begin{pmatrix} -1.398.744 \\ 1.417.176 \\ 1.380.312 \end{pmatrix}.$$

4. On trouve

$$\tilde{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ -0.5 \\ -1. \end{pmatrix},\ \tilde{r}^{(2)} \approx \begin{pmatrix} -0.667 \\ 1. \\ 0.333 \end{pmatrix},\ \tilde{r}^{(3)} \approx \begin{pmatrix} 0.846 \\ -0.692 \\ -1. \end{pmatrix},\ \tilde{r}^{(4)} \approx \begin{pmatrix} -0.852 \\ 1. \\ 0.704 \end{pmatrix},\ \tilde{r}^{(5)} \approx \begin{pmatrix} 0.917 \\ -0.835 \\ -1. \end{pmatrix},$$

On trouve pour $k = 10$ et $k = 11$:

$$\tilde{r}^{(10)} \approx \begin{pmatrix} -0.987 \\ 1. \\ 0.974 \end{pmatrix},\ \tilde{r}^{(11)} \approx \begin{pmatrix} 0.991 \\ -0.983 \\ -1. \end{pmatrix}.$$

On remarque que $\tilde{r}^{(k)}$ s'oriente vers un vecteur proportionnel à $y^{(2)} = [-1, 1, 1]^T$, en changeant alternativement de direction. Plus précisément, il semble que $(-1)^k \tilde{r}^{(k)}$ tend vers un vecteur proportionnel à $y^{(2)}$. On note que le signe de λ_2 est négatif.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.3

Si λ_1 était complexe non réelle, alors $\bar{\lambda}_1$ serait une autre valeur propre notée λ_2 et on aurait $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, ce qui est faux, donc λ_1 est réelle. Il est évident que λ_1 est simple et non nulle.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.2

On rappelle que le polynôme caractéristique s'écrit $\chi_n(\lambda) = \det(\lambda I_n - A^{(n)})$ (ou $\det(A^{(n)} - \lambda I_n)$, ce qui peut changer le signe en fonction de la parité de n)). On propose deux possibilités.

Possibilité 1 : développer selon la première colonne pour mettre en évidence une relation entre χ_n et χ_{n-1}.

Possibilité 2 : ajouter à la première colonne de $\lambda I_n - A^{(n)}$ une combinaison linéaire des autres colonnes afin de faire disparaître tous les termes de la colonne sauf le dernier.

Retour à l'exercice ▲

Possibilité 1 : en développant selon la première colonne, on trouve $\chi_n(\lambda) = \lambda\chi_{n-1}(\lambda) + (-1)^{n-1}\alpha_n \det(B^{(n-1)})$, où $B^{(n-1)}$ est une certaine matrice triangulaire inférieure de taille $n-1$. Obtenir que $\chi_n(\lambda) = \lambda\chi_{n-1}(\lambda) + \alpha_n$, calculer χ_1 et conclure par une récurrence immédiate.

Possibilité 2 : ajouter à la première colonne $\sum_{j=2}^{n} \lambda^j (\lambda I_n - A^{(n)})_j$ (ce qui ne change pas le déterminant), et obtenir une colonne nulle sauf le dernier terme qui vaut $p_n(\lambda)$.
Le déterminant vaut donc $\chi_n(\lambda) = (-1)^{n-1} p_n(\lambda) \det(B^{(n-1)})$. Conclure.

Retour à l'exercice ▲