Exercices du chapitre 8 avec corrigé succinct

Exercice VIII.1 Calcul de valeurs propres par la méthode classique

Soient la matrice A et le vecteur $x^{(0)}$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 16 & 5 & 8 \\ -2 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique.
2. Trouver les racines du polynôme caractéristique. Chercher des racines évidentes. Remarquer que 2 est racine évidente.
3. Dire si la matrice est diagonalisable. Revoir le cours sur les valeurs propres et remarquer que les valeurs propres sont simples.
4. Déterminer les vecteurs propres. Résoudre 3 systèmes linéaires, dont l'espace de solution est de dimension 1 ici.

Solution :

1. Le polynôme caractéristique est

$$P_A(s) = \det(sI_n - A) = s^3 - 4^2 - 11s + 30 = (s-5)(s+3)(s-2)$$

2. Les racines sont $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 2$ (classées par ordre décroissant de leurs valeurs absolues).
3. Les matrices réelles dont les valeurs propres sont réelles et simples sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$. En effet, dans ce cas, pour chaque sous espace propre, la multiplicité de la valeur propre (multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique $(=1)$) est égale au degré du sous espace propre $(=1)$.
4. En résolvant les systèmes $Ay^{(i)} = \lambda_i y^{(i)}$, on trouve par exemple : $y^{(1)} = [1,1,-2]^T$, $y^{(2)} = [-1,1,1]^T$, $y^{(3)} = [1,0,-2]^T$.
   Note : les solutions forment un espace vectoriel (ici de dimension 1), donc tout vecteur non nul proportionnel à ceux donnés est correct.

Exercice VIII.2 Puissances d'une matrice

Soient la matrice A et le vecteur $x^{(0)}$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 16 & 5 & 8 \\ -2 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \; x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les questions suivantes peuvent être faites en utilisant `scilab`.

1. Calculer $z^{(k)} = A^{(k)}x^{(0)}$ pour $k = 1,2$, 5 et 10.
2. Calculer $\tilde{z}^{(k)} = \dfrac{z^{(k)}}{\|z^{(k)}\|_\infty}$. Que remarque-t-on ?
3. Calculer $r^{(k)} = Az^{(k)} - 5z^{(k)}$ pour $k = 1,2$, 5, 10 et 11.
4. Calculer $\tilde{r}^{(k)} = \dfrac{r^{(k)}}{\|r^{(k)}\|_\infty}$. Que remarque-t-on ?

Solution :

1. On trouve

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix},\ z^{(2)} = \begin{pmatrix} 103 \\ 79 \\ -179 \end{pmatrix},\ z^{(3)} = \begin{pmatrix} 371 \\ 581 \\ -823 \end{pmatrix},\ z^{(4)} = \begin{pmatrix} 2647 \\ 2257 \\ -5051 \end{pmatrix},\ z^{(5)} = \begin{pmatrix} 11.579 \\ 13.229 \\ -23.887 \end{pmatrix}.$$

   On trouve pour $k = 10$:

$$z^{(10)} = \begin{pmatrix} 39.233.503 \\ 38.885.353 \\ -78.289.859 \end{pmatrix}.$$

2. On trouve

$$\tilde{z}^{(1)} \approx \begin{pmatrix} -0.0344 \\ 1. \\ -0.241 \end{pmatrix},\ \tilde{z}^{(2)} \approx \begin{pmatrix} 0.575 \\ 0.408 \\ -1. \end{pmatrix},\ \tilde{z}^{(3)} \approx \begin{pmatrix} 0.451 \\ 0.706 \\ -1. \end{pmatrix},\ \tilde{z}^{(4)} \approx \begin{pmatrix} 0.524 \\ 0.447 \\ -1. \end{pmatrix},\ \tilde{z}^{(5)} \approx \begin{pmatrix} 0.485 \\ 0.554 \\ -1. \end{pmatrix},$$

   On trouve pour $k = 10$:

$$\tilde{z}^{(10)} \approx \begin{pmatrix} 0.501 \\ 0.497 \\ -1. \end{pmatrix}.$$

   On remarque que $\tilde{z}^{(k)}$ tend vers un vecteur proportionnel à $y^{(1)} = [1, 1, -2]^T$, quand k tend vers l'infini. Donc, les $z^{(k)}$ s'orientent aussi, peu à peu, dans la direction de $y^{(1)}$, mais comme leurs normes grandissent rapidement, c'est plus difficile à observer.

3. On trouve

$$r^{(1)} = \begin{pmatrix} 108 \\ -72 \\ -144 \end{pmatrix},\ r^{(2)} = \begin{pmatrix} -144 \\ 216 \\ 72 \end{pmatrix},\ r^{(3)} = \begin{pmatrix} 792 \\ -648 \\ -936 \end{pmatrix},\ r^{(4)} = \begin{pmatrix} -1656 \\ 1944 \\ 1368 \end{pmatrix},\ r^{(5)} = \begin{pmatrix} 6408 \\ -5832 \\ -6984 \end{pmatrix}.$$

   On trouve pour $k = 10$:

$$r^{(10)} = \begin{pmatrix} -1.398.744 \\ 1.417.176 \\ 1.380.312 \end{pmatrix}.$$

4. On trouve

$$\tilde{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ -0.5 \\ -1. \end{pmatrix},\ \tilde{r}^{(2)} \approx \begin{pmatrix} -0.667 \\ 1. \\ 0.333 \end{pmatrix},\ \tilde{r}^{(3)} \approx \begin{pmatrix} 0.846 \\ -0.692 \\ -1. \end{pmatrix},\ \tilde{r}^{(4)} \approx \begin{pmatrix} -0.852 \\ 1. \\ 0.704 \end{pmatrix},\ \tilde{r}^{(5)} \approx \begin{pmatrix} 0.917 \\ -0.835 \\ -1. \end{pmatrix},$$

   On trouve pour $k = 10$ et $k = 11$:

$$\tilde{r}^{(10)} \approx \begin{pmatrix} -0.987 \\ 1. \\ 0.974 \end{pmatrix},\ \tilde{r}^{(11)} \approx \begin{pmatrix} 0.991 \\ -0.983 \\ -1. \end{pmatrix}.$$

   On remarque que $\tilde{r}^{(k)}$ s'oriente vers un vecteur proportionnel à $y^{(2)} = [-1, 1, 1]^T$, en changeant alternativement de direction. Plus précisément, il semble que $(-1)^k \tilde{r}^{(k)}$ tend vers un vecteur proportionnel à $y^{(2)}$. On note que le signe de λ_2 est négatif.

Exercice VIII.3 Valeur propre dominante isolée

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}$. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les n valeurs propres de A. Montrer que si ces valeurs propres vérifient $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$, alors λ_1 est une valeur propre réelle, simple et non nulle.

Solution : Si λ_1 était complexe non réelle, alors $\bar{\lambda}_1$ serait une autre valeur propre notée λ_2 et on aurait $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, ce qui est faux, donc λ_1 est réelle. Il est évident que λ_1 est simple et non nulle.
