Exercices du chapitre 3 avec corrigé succinct

Exercice III.1 Ch3-Exercice1

Soient α et u_0 deux réels donnés. Soit alors (u_n) une suite géométrique définie par $u_n = \alpha u_{n-1}$. Donner le terme général de la suite en fonction de n, α et u_0.

Solution : $u_n = \alpha^n u_0$

Exercice III.2 Ch3-Exercice2

Soit une suite u_n et soit la suite $v_n = u_n - l$, où l est un réel donné. Montrer, en utilisant la définition de la convergence que

$$((u_n) \text{ tend vers } l) \Leftrightarrow ((v_n) \text{ tend vers } 0)$$

Solution : La convergence de la suite (u_n) vers l s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n > N) \Rightarrow (|u_n - l| < \varepsilon),$$

ce qui est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n > N) \Rightarrow (|v_n| < \varepsilon),$$

puisque $v_n = u_n - l$. (Il n'y a donc pas de calcul !)

Exercice III.3 Ch3-Exercice3

Quelle est la limite d'une suite constante ? (On fera la démonstration en utilisant la définition).

Solution : La limite d'une suite constante $u_n = a$ est a puisque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = 1, (n > N) \Rightarrow (|u_n - a| = 0 < \varepsilon).$$

Exercice III.4 Ch3-Exercice4

Utiliser la définition de la convergence pour montrer que la suite $u_n = \frac{1}{n}$, $n > 0$, tend vers 0.

Solution : Soit $\varepsilon > 0$, alors

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il suffit donc de choisir ,

$$N \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Par exemple

$$N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1.$$

on a aura alors

$$(n > N) \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Exercice III.5 Ch3-Exercice5

écrire, à l'aide de quantificateurs, la définition de la divergence d'une suite u_n. Montrer alors que la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ est divergente.

Solution : Rappelons nous que $P \Rightarrow Q$ s'écrit (**non** P) **ou** Q, expression dont la négation est P **et** (**non** Q). Nous arrivons ainsi à :

$$\forall l, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N},\ (n \geq N) \textbf{ et } (|u_n - l| \geq \varepsilon).$$

Pour montrer que la suite $u_n = (-1)^n$ (qui ne prend que les valeurs $+1$ et -1) diverge nous allons faire une démonstration cas par cas sur l.

— $\forall l \geq 0, \exists\, 0 < \varepsilon \leq l+1, \forall N, \exists n = 2N+1$ et $|u_n - l| = |-1-l| = 1+l \geq \varepsilon$

— $\forall l < 0, \exists\, 0 < \varepsilon \leq -l+1, \forall N, \exists n = 2N$ et $|u_n - l| = |1-l| = 1-l \geq \varepsilon$

Exercice III.6 Ch3-Exercice6

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geq n.$$

En déduire que

$$(u_n) \text{ converge vers } \ell \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad (u_{\varphi(n)}) \text{ converge vers } \ell.$$

Solution :

1. $\varphi(0) \geq 0$ est évident.
   On raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi(n_0) < n_0$. Alors $\varphi(n_0) \leq n_0 - 1$ et parmi les (n_0+1) images
   $$0 \leq \varphi(0) < \varphi(1) < \ldots < \varphi(n_0) \leq n_0 - 1,$$
   il y a au plus n_0 valeurs distinctes. Donc au moins deux de ces images sont identiques, ce qui contredit la stricte monotonie.
2. On démontre la convergence de $\left(u_{\varphi(n))}\right)$ vers ℓ.

   Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse (u_n) converge donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
   $$n > N \quad \Rightarrow \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$
   D'après le résultat précédent, il suffit de concaténer les inégalités
   $$\varphi(n) \geq n > N \Rightarrow \quad |u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon.$$
   A partir du même indice N, les termes de la suite $\left(u_{\varphi(n))}\right)$ s'accumulent autour de ℓ avec un écart au plus égal à ε.

Exercice III.7 Ch3-Exercice7

En utilisant le lien entre les suites convergentes et les suites bornées, montrer qu'une suite qui tend vers l'infini est divergente.

Solution : Puisque $P \Rightarrow Q$ est équivalent à (**non** Q) $\Rightarrow$ (**non** P), et sachant que toute suite convergente est bornée, nous arrivons à : toute suite non bornée est divergente.

Exercice III.8 Ch3-Exercice8

Montrer que la suite $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ est croissante et majorée. Est-elle convergente ?

Solution : La suite est croissante car (le vérifier)

$$\frac{n}{n+1} \le \frac{n+1}{n+2}$$

et elle est bornée, puisque

$$|u_n| = u_n \le 1,$$

elle est donc convergente.

Exercice III.9 Ch3-Exercice9

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites croissantes. Montrer que la suite $(u_n + v_n)$ est aussi croissante.
2. Soit (u_n) une suite croissante. Montrer que la suite $(-u_n)$ est décroissante.

Solution :

1. Se déduit immédiatement du fait que :

$$\begin{aligned}&\forall m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\\ &\Big\{\{(m \le n) \Rightarrow (u_m \le u_n)\}\ \textbf{et}\ \{(m \le n) \Rightarrow (v_m \le v_n)\}\Big\}\\ &\quad \Rightarrow \quad \{(m \le n) \Rightarrow (u_m + v_m \le u_n + v_n)\}\end{aligned}$$

2. Se déduit immédiatement du fait que :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \{(m \le n) \Rightarrow (u_m \le u_n)\} \quad \Rightarrow \quad \{(m \le n) \Rightarrow (-u_m \ge -u_n)\}$$

Exercice III.10 Ch3-Exercice10

Soit (u_n) une suite croissante. Montrer que si (u_n) converge vers une limite l, alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \le l$.

Solution : On va montrer la contraposée, c'est à dire :
S'il existe un entier N tel que $l < u_N$, alors la suite (u_n) ne converge pas vers l.
Si $l < u_N$, alors, du fait de la croissance de la suite (u_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \ge N) \Rightarrow (l < u_N \le u_n),$$

de sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \ge N) \Rightarrow (0 < u_N - l \le u_n - l).$$

La proposition (u_n) converge vers l se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N' \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n > N' \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon),$$

Donc sa négation se traduit par :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N' \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N}, \quad (n > N') \text{ et } (|u_n - l| \ge \varepsilon),$$

On peut choisir $\varepsilon = u_N - l$.
Pour tout N', on peut choisir $n = \max(N'+1, N)$.
On a alors $n > N'$ et $n \ge N$ donc $u_n - l \ge u_N - l = \varepsilon$ donc $|u_n - l| \ge \varepsilon$.
Ceci termine de démontrer que la suite (u_n) ne converge pas vers l.

Exercice III.11 Ch3-Exercice11

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deux suites convergentes dont on notera $\hat{u}$ et $\hat{v}$ les limites respectives. En utilisant la définition de la convergence, montrer que la suite (u_n+v_n) converge vers $\hat{u}+\hat{v}$ (on pensera à utiliser l'inégalité triangulaire : $|u_n+v_n-\hat{u}-\hat{v}| \leq |u_n-\hat{u}|+|v_n-\hat{v}|$).

Solution : On écrit que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent, soit pour tout $\varepsilon > 0$ donné,

$$\exists N_1,\ (n > N_1) \Rightarrow (|u_n - \hat{u}| < \frac{\varepsilon}{2})$$

$$\exists N_2,\ (n > N_2) \Rightarrow (|v_n - \hat{v}| < \frac{\varepsilon}{2})$$

et par conséquent

$$\exists N = \max(N_1, N_2),\ (n > N) \Rightarrow (|u_n + v_n - \hat{u} - \hat{v}| \leq |u_n - \hat{u}| + |u_n - \hat{v}| < \varepsilon)$$

Exercice III.12 Ch3-Exercice12

Soit (v_n) une suite convergeant vers 0 et soit la suite (u_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq v_n$. Montrer que la suite (u_n) tend vers 0.

Solution : On a donc $-v_n \leq u_n \leq v_n$,$-v_n$ et v_n ont pour limite 0, on applique le théorème 3.1.3 qui permet de conclure que u_n tend vers 0.

Exercice III.13 Ch3-Exercice13

Soit (v_n) une suite convergeant vers 0 et soit (u_n) une suite bornée, montrer que la suite $(u_n v_n)$ tend vers 0.

Solution : On a $|u_n v_n| = |u_n||v_n| \leq M|u_n|$.
Or

$$\lim_{n\to\infty} M|u_n| = 0.$$

D'où (en utilisant l'exercice précédent) la suite $(u_n v_n)$ tend vers 0.

Exercice III.14 Ch3-Exercice14

1. Donner des exemples de suites (u_n) et (v_n) qui tendent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$ telles que :
   (a) (u_n+v_n) tende vers $-\infty$.
   (b) (u_n+v_n) tende vers $+\infty$.
   (c) (u_n+v_n) converge vers l.
2. Donner des exemples de suites (u_n) et (v_n) qui tendent respectivement vers $+\infty$ et 0 telles que :
   (a) $(u_n v_n)$ tende vers $+\infty$.
   (b) $(u_n v_n)$ converge vers 0.
   (c) $(u_n v_n)$ converge vers $l \neq 0$.

Solution :

1. (a)

$$u_n = n, v_n = -n^2, u_n + v_n = n(1-n).$$

   (b)

$$u_n = n^2, v_n = -n, u_n + v_n = n(n-1).$$

(c)

$$u_n = n, v_n = -n, u_n + v_n = 0.$$

2. (a)

$$u_n = n^4, v_n = \frac{1}{n^2}, u_n v_n = n^2.$$

(b)

$$u_n = n^2, v_n = \frac{1}{n^4}, u_n v_n = \frac{1}{n^2}.$$

(c)

$$u_n = n^2, v_n = \frac{1}{n^2}, u_n v_n = 1.$$

Exercice III.15 Ch3-Exercice15

Soit (u_n) une suite convergente de limite l strictement positive.

1. Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que, pour tout n supérieur à N, on ait $u_n > 0$.
2. Si on définit la suite (v_n) par $v_n = 1/u_n$, pour n supérieur au N précédent, les N premiers termes de la suite étant quelconques, quelle est la limite de la suite (v_n) ?
3. Peut-on faire le même raisonnement si $l < 0$?

Solution :

1. Puisque $l > 0$, il existe $0 < \varepsilon < l$. On choisit un tel ε. Puisque la suite converge, on a
$$\exists N,\ (n > N) \Rightarrow (l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon).$$
Or $l - \varepsilon > 0$, d'où $u_n > 0$ pour $n > N$.
2. Les éléments de la suite v_n existent donc pour $n > N$ et on sait que la limite du quotient de deux suites convergentes, dans ce cas, est le quotient des limites, soit $\frac{1}{l}$.
3. Le raisonnement est le même pour $l < 0$ car dans ce cas il suffit d'utiliser la suite $(-u_n)$.

Exercice III.16 Ch3-Exercice16

Déterminer un équivalent des suites (u_n) définies pour $n \geq 1$ par

$$(i)\ u_n = \frac{2}{n} - \frac{3}{n+1}, \qquad (ii)\ u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \qquad (iii)\ u_n = \frac{\sqrt{n+2}}{n^2+n}$$

Solution :

(i) Mettre le tout au même dénominateur :
$$u_n = \frac{2(n+1) - 3n}{n(n+1)} = \frac{2-n}{n^2+n} \sim -\frac{1}{n}.$$

(ii) Mettre le tout au même dénominateur :
$$u_n = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \sim \frac{2}{n^3}.$$

(iii) Ici, il faut factoriser par les termes dominants au numérateur et dénominateur :
$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2} \times \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{1+\frac{1}{n}} \sim \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Exercice III.17 Ch3-Exercice17

Montrer, à l'aide de contre-exemples, que les affirmations suivantes sont fausses.

1. Étant donnée une fonction f, si $u_n \sim v_n$ alors $f(u_n) \sim f(v_n)$.
2. Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n - v_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
3. Si $u_n - v_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ alors $u_n \sim v_n$.

Solution :

1. Prendre $f(x) = x - 1$, $u_n = \frac{n}{n+1}$ et $v_n = \frac{n+1}{n}$

$$u_n \sim v_n \text{ alors que } f(u_n) = -\frac{1}{n+1} \sim -\frac{1}{n} \text{ et } f(v_n) = \frac{1}{n} \text{ donc } \frac{f(u_n)}{f(v_n)} \underset{n\to+\infty}{\to} -1.$$

   $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ ne sont pas équivalentes.
2. Avec $u_n = n^2 + n$ et $v_n = n^2 - n$, on a bien $u_n \sim v_n$. Pourtant $u_n - v_n = 2n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.
3. Avec $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$, on a bien $u_n - v_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Pourtant $\frac{u_n}{v_n} = n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, donc les deux suites (u_n) et (v_n) ne sont pas équivalentes.

Exercice III.18 Ch3-Exercice18

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers compris entre 0 et 9. On associe à $(a_n)_{n\geq 1}$, les suites de nombres rationnels suivantes :

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}, \qquad \beta_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}$$

Montrer que ces deux suites (α_n) et (β_n) sont adjacentes.

[Elles définissent un réel x, leur limite commune, dont α_n et β_n sont les ***approximations décimales à* $\mathbf{10^{-n}}$ *près***, respectivement par défaut et par excès.]

Solution : On peut vérifier aisément que $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \geq 0$, que $\beta_{n+1} - \beta_n = \frac{a_{n+1}-9}{10^{n+1}} \leq 0$ et que $\beta_n - \alpha_n = \frac{1}{10^n} > 0$ tend vers 0. Les deux suites sont donc adjacentes.

Exercice III.19 Ch3-Exercice19

Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \{(m \geq N) \textbf{ et } (n \geq N)\} \quad \Rightarrow \quad (|u_m - u_n| \leq \varepsilon),$$

est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \{(n \geq N) \textbf{ et } (p \in \mathbb{N})\} \quad \Rightarrow \quad (|u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon).$$

(Une des deux implications est claire, pour l'autre il faut voir que si deux entiers sont quelconques, l'un est nécessairement supérieur ou égal à l'autre).

Solution :

1. L'implication de la deuxième proposition par la première est claire, puisque, quel que soit l'entier naturel p, $n + p$ est supérieur ou égal à n.
2. L'implication réciproque provient du fait que si on prend m et n quelconques, nécessairement l'un des deux est supérieur ou égal à l'autre, par exemple $m \geq n \geq N$ et on peut alors poser $m = n + p$ $(p \geq 0)$.

Exercice III.20 Ch3-Exercice20

Montrer, en utilisant les suites de Cauchy, que la suite (u_n), définie par $u_n = (-1)^n$ est divergente.

Solution : Puisqu'il y a équivalence entre suite de Cauchy et suite convergente, il suffit de démontrer que la suite (u_n) n'est pas une suite de Cauchy, c'est à dire

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists m \geq N (et) \exists n \geq N (et) |u_m - u_n| > \varepsilon.$$

En effet si l'on prend $\varepsilon = 1$, $m = 2N$, $n = 2N+1$, on obtient $|u_m - u_n| = 2 > 1$, ce qui achève la démonstration.

Exercice III.21 Ch3-Exercice21

Montrer que la suite récurrente

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = K u_n,\ n \geq 0. \end{cases}$$

où $0 \leq K < 1$ est une suite convergente. Puis montrer que sa limite est nulle.

Solution : On montre par récurrence que $u_n = K^n$. Donc $u_n \geq 0$.
La suite (u_n) est décroissante $(u_{n+1} - u_n = (K-1)u_n \leq 0)$.
La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente. Soit l sa limite.
Puisque la suite (u_{n+1}) a la mêeme limite que la suite (u_n), on a

$$l = Kl \Leftrightarrow l(K-1) = 0$$

et comme $K < 1$, la seule solution est $l = 0$.

Exercice III.22 Ch3-Exercice22

étudier, selon le nombre réel α, la suite récurrente *linéaire* d'ordre 1 définie par

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné}, \\ u_{n+1} = \alpha u_n,\ n \geq 0. \end{cases}$$

Solution : On peut montrer par récurrence que $u_n = \alpha^n u_0$.

- Lorsque $-1 < \alpha < 1$, on définit $v_n = |u_n| = |u_0||\alpha|^n$. On a démontré dans l'exercice A.1.18 que la suite $|\alpha|^n$ convergeait vers 0. La suite $(v_n = |u_n|)$ converge donc vers 0 et donc la suite (u_n) converge vers 0.
- Lorsque $1 < \alpha$, on pose $v_n = 1/u_n$, on utilise l'exercice A.1.18 pour montrer que (v_n) converge vers 0, donc u_n tend vers $+\infty$, donc la suite (u_n) ne converge pas.
- Lorsque $\alpha < -1$, on pose $v_n = 1/|u_n|$, on utilise l'exercice A.1.18 pour montrer que v_n converge vers 0, donc $|u_n|$ tend vers $+\infty$, donc la suite (u_n) ne converge pas.
- Lorsque $\alpha = 1$, on obtient une suite constante (laquelle ?).
- Lorsque $\alpha = -1$, on obtient une suite divergente bien connue (laquelle ?).

Exercice III.23 Ch3-Exercice23

Soit f une fonction réelle telle que

$$(L) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|,$$

où $0 < K < 1$ est donné. Montrer que si l'équation $u = f(u)$ a une solution, celle-ci est unique.

Solution : Supposons qu'il existe deux solutions distinctes l_1 et l_2 de l'équation $u = f(u)$, soit $l_1 = f(l_1)$ et $l_2 = f(l_2)$. Alors, on a

$$|l_1 - l_2| = |f(l_1) - f(l_2)| \leq K|l_1 - l_2| < |l_1 - l_2|$$

ce qui est impossible ...

Exercice III.24 Ch3-Exercice24

Soit la série (u_n), définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_n = \dfrac{1}{n}, \quad \text{pour } (n > 0). \end{cases}$$

Notons (S_n), la suite des sommes partielles associées.

1. Montrer que $S_n = S_{n-1} + 1/n$, $S_0 = 0$.
2. Démontrer, suivant un raisonnement par l'absurde, que la suite (S_n) diverge.
3. Est-ce que la suite (u_n) tend vers 0 ? Ce résultat permet-il de conclure que la série (u_n) converge ?

Solution :

1. $S_0 = u_0 = 0$, $S_n = u_0 + \ldots + u_{n-1} + u_n = S_{n-1} + u_n$.
2. On procède par l'absurde. Supposons que (S_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Alors la suite (S_{2n}) converge vers ℓ également. D'après les opérations sur les limites, on en déduit le résultat suivant : $S_{2n} - S_n \underset{n\to\infty}{\to} \ell - \ell = 0$. Maintenant, calculons $S_{2n} - S_n$:

   $$S_{2n} - S_n = \sum_{k=0}^{2n} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}.$$

   La suite (u_n) étant décroissante on a

   $$n+1 \leq k \leq 2n \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} \geq u_k \geq u_{2n} \quad \Rightarrow \quad u_k \geq u_{2n} = \frac{1}{2n}.$$

   Donc

   $$S_{2n} - S_n \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ fois}} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

   D'après le théorème de comparaison des limites, on en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} - S_n = 0 \geq \frac{1}{2}$. Ce qui est absurde. Donc (S_n) est une suite divergente.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Le fait que la suite (u_n) tende vers 0 est un condition nécessaire mais non suffisante pour que la série (u_n) converge, comme le montre cet exemple.

Exercice III.25 Ch3-Exercice25

Les séries de termes généraux définis à l'exercice A.1.16 sont-elles convergentes ?

Solution :

(i) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ tend vers $+\infty$ donc $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ tend vers $-\infty$

(ii) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ converge donc $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ aussi.

(iii) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge donc $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ aussi.
